

目次

はじめに	iii	2.8.1 1次元と2次元、3次元との違い	18
第1章 有限要素法の概要	1	2.8.2 スカラー	18
1.1 有限要素法とは	1	2.8.3 ベクトル	18
1.2 有限要素法の歴史	2	2.8.4 ベクトルの長さ	19
1.2.1 変分法	2	2.8.5 ベクトルの加減算	19
1.2.2 弾性構造解析	3	2.8.6 ベクトルの内積	19
1.2.3 仮想仕事の原理	3	2.8.7 ベクトルの外積	21
1.2.4 重み付け残差法	4	2.8.8 2次元の基本的なベクトル	21
1.2.5 境界要素法とグリーンの考察	5	2.9 グリーンの定理（発散の定理）	22
1.3 勉強の進め方	6	2.9.1 1次元の場合	23
第2章 有限要素法で使う数学	9	2.9.2 2次元の場合	23
2.1 2つの関数の微分	9	2.9.3 発散の定理の副産物	28
2.2 チェーンルール	10	2.10 インデックスノーテーション	31
2.3 1次元の部分積分法	11	2.10.1 座標軸名の変更—— (x, y, z) から (x_1, x_2, x_3) へ	31
2.4 一階常微分方程式	14	2.10.2 フリーインデックス	32
2.5 二階常微分方程式	14	2.10.3 ダミーインデックス	32
2.6 1次元線形座標変換	15	2.10.4 テンソル	33
2.7 1次元2次元座標変換	17	2.10.5 微分の記号	34
2.8 ベクトル演算	18	2.11 2次元、3次元の部分積分法	34
		第3章 有限要素法で使う数値計算法と代数学	39
		3.1 数値積分	39
		3.1.1 従来の数値積分法	39
		3.1.2 ガウス・ルジャンドル (Gauss-Legendre) 法	41
		3.2 有限要素法での微分の計算	44
		3.2.1 2次式の微分	44
		3.3 ベクトルとマトリクスの演算	46
		3.3.1 ベクトルの長さ	46
		3.3.2 マトリクスの特徴	48

3.3.3	マトリクスとベクトルの演算	50	4.3.7	自由度が2の近似式	81
3.4	連立方程式の解き方	52	4.3.8	コンピュータプログラム	83
3.4.1	有限要素法における連立方程式の解法の概要	53	4.3.9	対称条件	83
3.4.2	2X2の連立方程式	53	4.4	重み付け残差法のまとめ1：領域を1要素で分割	87
3.4.3	ガウスの消去法	54	4.5	重み付け残差法のまとめ2：近似式の $\phi_1(x)$ について	88
3.4.4	三重対角マトリクス	55	4.5.1	$\phi_1(x)$ を山形にする	89
3.4.5	対称三重対角マトリクス	56	4.5.2	任意の点の未知数 $u(x)$ が直接得られる近似式	91
3.4.6	非対称多重対角マトリクス	57			
3.4.7	対称多重対角マトリクス	58			
第4章	最も簡単な有限要素法	61	第5章	1次元領域を要素で分割	97
4.1	バックリング問題の支配方程式の導出	61	5.1	有限要素法の用語	97
4.1.1	単純梁の両端に作用しているモーメントと内部応力の関係	61	5.2	2つの1次要素で分割	98
4.1.2	ビーム断面の応力分布	63	5.2.1	未知数と近似式	98
4.1.3	ニュートンの第2法則	66	5.2.2	未知数 (u_1, u_2, u_3) の管理区域と重み関数	100
4.1.4	応力分布による断面でのモーメント	66	5.2.3	境界条件と関数との関係	100
4.1.5	円の式と円の微分方程式	67	5.2.4	1次要素	100
4.1.6	支配方程式とヘルムホルツ方程式との関係	69	5.2.5	積分式	101
4.1.7	ヘルムホルツ方程式の境界条件	69	5.2.6	最初の積分式	101
4.1.8	厳密解	70	5.2.7	残り2つの積分式	104
4.1.9	近似式	71	5.2.8	連立方程式が成り立つ条件	106
4.2	バックリング問題のまとめ	72	5.2.9	ディリクレ型境界条件を組み込む	106
4.3	重み付け残差法をヘルムホルツ方程式に応用	73	5.2.10	要素が4つの場合	109
4.3.1	残差	74	5.2.11	左右対称の場合	110
4.3.2	積分式	74	5.3	1次要素の形状関数と近似式と重み関数のまとめ	112
4.3.3	重み関数	75	5.4	1次元領域を要素で分割のまとめ	113
4.3.4	部分積分法	75			
4.3.5	有限要素式	77	第6章	要素ごとの積分	115
4.3.6	自由度が1の近似式のまとめ	79	6.1	要素ごとの積分ルール	115
			6.1.1	これまでの積分	115
			6.1.2	要素1での積分	116

6.1.3 最初のアセンブリ	118	8.1.2 ヘルムホルツ方程式の状態関数	144
6.1.4 要素2での積分	118	8.1.3 第1変分	144
6.1.5 2回目のアセンブリ	119	8.1.4 変分法と重み付け残差法は同じ	149
6.2 プログラムの紹介	121	8.2 オイラー・ラグランジュ方程式	150
6.2.1 プログラムの概要	121	8.2.1 $\delta I=0$ を満たす条件式	150
6.2.2 プログラムBUCKLE.FORの紹介	122	8.2.2 状態関数と微分方程式との架け橋	151
6.2.3 プログラムBUCKLE1.FORの紹介	123	8.2.3 例題で示す積分式と δy_1 の関係	153
6.2.4 プログラムBUCKLE1A.FORの紹介	124	8.3 ガラーキン法と重み関数	154
6.3 要素間の連続性	125	8.4 ノイマン型境界条件の場合	155
6.4 インプットデータの作成と計算の実行	127	8.4.1 近似式とノイマン型境界条件との関係	155
6.5 要素ごとの積分のまとめ	128	8.4.2 ノイマン型境界条件用の形状関数	157
第7章 新しい重み関数による有限要素法	131	8.5 変分法のまとめ	159
7.1 新しい重み関数	131	第9章 1次元2次要素	163
7.1.1 重み関数の新しい記述方法	131	9.1 形状関数の作り方	163
7.1.2 近似式と重み関数のマトリクス表示	132	9.1.1 2次要素の概要	163
7.1.3 境界積分項	133	9.1.2 形状関数の条件	164
7.1.4 $\int_0^L \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx$ の項	134	9.1.3 座標変換	165
7.1.5 du/dx と $d\delta u/dx$ の積	135	9.1.4 形状関数	166
7.1.6 $\int_0^L \alpha^2 u \delta u dx$ の項	135	9.2 形状関数の積分と微分	167
7.1.7 マトリクス型有限要素式	136	9.2.1 $[N]^T[N]$ の積分	167
7.2 各項の特徴	137	9.2.2 $[B]^T[B]$ の積分	168
7.2.1 二階微分項	137	9.3 プログラムの紹介	169
7.2.2 生成項	139	9.3.1 BUCKLE2.FORとBUCKLE2A.FOR	169
7.3 新しい重み関数のまとめ	140	9.3.2 計算例による解析精度の検証	170
第8章 変分法	143	第10章 非線形微分方程式の解き方	173
8.1 ヘルムホルツ方程式の変分法	143	10.1 ビームの非線形微分方程式の解き方	173
8.1.1 変分法が得意とする問題	143	10.1.1 非線形微分方程式と有限要素法との関係	173

10.1.2	$Y(x)$ の適切な予測が必要	173	11.6	境界積分	202
10.1.3	$\beta(x)$ の積分と要素の関係	174	11.6.1	境界積分の項	202
10.1.4	計算例の諸条件と計算結果	174	11.6.2	要素間では何が起きているか	205
10.2	ワイヤーとチェーンの解析	176	11.6.3	境界積分の項の計算が不要なケース	206
10.2.1	ワイヤーとチェーンの特徴	176	11.7	ラプラス方程式を解く有限要素法のまとめ	207
10.2.2	微分方程式の導出	177	11.8	例題	208
10.2.3	プログラムと例題	180	11.8.1	手計算による例題の計算	208
第 11 章	2次元ラプラス方程式の解き方	181	11.9	プログラムの紹介	212
11.1	熱方程式の導き方	181	11.9.1	プログラムの概要	212
11.1.1	1次元熱拡散方程式	181	11.9.2	プログラムの構成	213
11.1.2	2次元熱拡散方程式	184	11.9.3	プログラムの入力で使われる変数	213
11.1.3	境界積分項について	187	11.9.4	ノイマン型境界条件と境界値の入力	214
11.1.4	2次元熱拡散方程式とフーリエ則	188	11.9.5	ちょっと理解に苦しむサブルーチンFORMQ	214
11.2	熱伝導係数	189	11.9.6	プログラムで例題を計算してみよう	214
11.2.1	等方性熱伝導係数	189	11.10	有限要素法解析での注意項目	215
11.2.2	直交異方性熱伝導係数	190	11.10.1	要素分割	215
11.2.3	非等方性熱伝導係数	191	11.10.2	節点番号の付け方	216
11.2.4	2次元熱拡散方程式と非等方性熱伝導係数	192	11.10.3	要素形状	217
11.3	2次元の重み付け残差法	193	11.10.4	三角形要素の $[N]^T[N]$ の積分	218
11.3.1	積分式	193	第 12 章	パラメトリック要素の特徴と利用例の紹介	223
11.4	三角形要素の作り方	195	12.1	乗り越えなければならないハードル	223
11.4.1	三角形要素の特徴	195	12.2	パラメトリック要素の概要	224
11.4.2	三角形要素の面積	196	12.3	三角形要素の欠点	224
11.4.3	近似式と形状関数	197	12.4	4節点アイソパラメトリック要素	225
11.5	$[B]^T[E][B]$ の計算	198	12.4.1	形状関数	225
11.5.1	領域積分のマトリクス表示	198	12.4.2	座標変換	227
11.5.2	領域積分の離散化	199	12.4.3	積分変数の変換 $dxdy \Rightarrow [J] d\xi d\eta$	228
11.5.3	三角形要素の場合	201	12.4.4	発散の定理を使った積分変数の変換方法	230

12.4.5	形状関数の微分	233
12.4.6	[B]マトリクスの計算	234
12.4.7	数値積分の計算方法	236
12.5	パラメトリック要素の作り方	237
12.5.1	概要	237
12.5.2	4節点アイソパラメトリック要素の形状関数の作り方	237
12.5.3	6節点アイソパラメトリック要素	239
12.5.4	8節点アイソパラメトリック要素	240
12.5.5	9節点アイソパラメトリック要素	241
12.5.6	3次元8節点アイソパラメトリック要素	243
12.6	プログラムの紹介	245
12.6.1	4節点要素のFEM4Q.FORの紹介	246
12.7	例題の計算	247
12.8	2次元の応用	250
12.8.1	楕円柱周りの流れ	250
12.8.2	流れ関数の計算方法	256
12.8.3	棒のねじり	260
12.8.4	ポンプによる地下水の汲み出し	264
12.8.5	音響振動と固有値問題	267
12.9	パラメトリック要素のまとめ	277
付 録	281
索 引	284