なっとくする複素関数

目次

まえがき ……i

本書の構成 ……ii

第1章 複素関数—何のために学ぶか ……1

何のために ……1
物理では，どんなときに複素数を使うか ……2
定積分の計算 ……4
解析接続 ……5
玲瓏なる境地 ……7
割り込みチャイム ……8

第2章 複素数の世界 ……9

複素平面 ……9
共役複素数 ……10
複素数の絶対値 ……10
初等関数 ……11
指数関数 ……12
三角関数 ……13
　指数関数の計算間違い ……14
オイラーの公式 ……15
オイラーの公式の美しさ ……17
アインシュタインの相対性理論の美しさ ……17
複素数を使って強制振動の微分方程式を解く ……19
特解を求める ……21
cos の代わりに sin の場合 ……22
一般解と特解 ……23

斉次方程式の解を求める ……24
一般解を求める ……27
特解の物理的な意味 ……28
「定常」とは ……29
複素数を極形式で表す ……29
偏角の範囲 ……31
偏角は変な角？ ……32
1の n 乗根を求める ……33
偏角という言葉の意味 ……34
偏角とコンピュータ ……34
無限遠点 $\infty, +\infty, -\infty$ ……34
線形と1次は同じ？ ……36
線形な微分方程式 ……38

第3章 正則な関数の世界 ……39

微分可能——実関数の場合 ……39
「微分可能」を言い換える ……40
微分可能——複素関数の場合 ……41
小さな違いが大きな違い ……41
ここでも「微分可能」を言い換える ……43
コーシー・リーマン方程式 ……44
コーシー・リーマン方程式を導く ……45
正則な関数 ……46
特異点 ……47
正則な関数はノッペラボー ……48
複素積分 ……49
混線に注意 ……50
コーシーの積分定理 ……53
積分路を変形する ……55
流れ図 ……56
経路に依存する複素積分の例 ……57
偏角に御用心 ……59
複素積分と不定積分 ……60

思い違い ……61

第4章 ベキ級数，テイラー展開 ……63

ベキ級数 ……63
テイラー展開 ……65
実関数のテイラー展開とどう違う ……66
テイラー展開は面倒くさい ……67

第5章 特異点，留数 ……73

特異点 ……73
孤立特異点の分類 ……73
ローラン展開 ……74
留数定理 ……76
(5.9)式の証明 ……78
留数定理の感想 ……78
留数を求める ……79

第6章 応用．定積分の計算 ……85

三角関数を含む定積分 ……85
有理関数の定積分 ……87
積分路の選択 ……89
フーリエ変換型の定積分 ……90
ひとまず卒業 ……93

第7章 主値積分 ……95

主値積分 ……95
主値積分を求める ……97

第8章 分岐点をもつ関数 …… 101

分岐点 …… 101
多価関数への対処法 …… 102
切断 …… 102
分岐点をもつ関数の定積分 …… 103
多価関数 …… 107
指数関数の定義は …… 109
ベキ乗関数の定義は …… 111

第9章 解析接続へ …… 113

流れ図 …… 113
ふたたび始まる物語 …… 113
et tu, Brute！ …… 113
コーシーの積分公式 …… 114
グルサの公式 …… 115
テイラー展開 …… 116
一致の定理 …… 118
一致の定理が意味すること …… 119
「一致」とは …… 121
解析接続の補助定理 …… 121
解析接続 …… 122
いくつかの例 …… 123
解析接続は「開け，胡麻！」 …… 125
ガンマ関数 …… 128
ガンマ関数は階乗の解析接続？ …… 129

第10章 リーマン面 …… 131

切り紙細工 …… 131
ふたたび分岐点 …… 133
$z^{\frac{1}{2}}$ を1価関数に …… 133

切り紙細工をもういちど …… 134
$z^{\frac{1}{2}}$ を含む関数の積分 …… 136
どっちがどっち？ …… 137
またまた切り紙細工 …… 137
リーマン面と偏角 …… 139
どっちのシートを取るべきか …… 139
振動数が複素数とは …… 141
これでおしまい …… 143

演習問題解答 …… 144
あとがき …… 155

索引 …… 156

装幀/海野幸裕