

# 目 次

1 序論——ソリトンからカオスへ .....	1
1.1 はじめに .....	1
1.2 線形とは, 非線形とは .....	4
1.2.1 粗視化と非線形性 .....	5
1.3 非線形現象のモデル化 .....	7
1.4 非線形発展方程式の解の存在, 一意性, 安定性 .....	9
1.5 近似手法 .....	11
1.5.1 物理系を近似する方法 .....	11
1.5.2 近似方程式の解法 .....	12
1.6 非線形偏微分方程式の解の定性的な考察 .....	12
2 複雑な物理系から簡単な近似方程式を導く摂動展開の方法 .....	15
2.1 摂動展開と近似方程式 .....	15
2.1.1 線形分散関係 .....	15
2.1.2 長波長近似 .....	16
2.1.3 波束の変調 .....	19
2.1.4 波と波との相互作用 .....	21
2.2 散逸・不安定系への拡張 .....	23
2.2.1 長波長不安定波 .....	24
2.2.2 包絡線方程式 .....	24
2.3 多重スケールの方法 .....	26
2.4 水面波の近似方程式 .....	27

2.4.1	基礎方程式	28
2.4.2	近似方程式の導出	31
2.4.3	長波方程式	34
3	ソリトン方程式の解と解法	36
3.1	ソリトン方程式の解の振舞い	37
3.1.1	KdV 方程式の解の性質	37
3.1.2	ソリトンの発見	40
3.2	ソリトン方程式の例	43
3.2.1	ソリトンの生成	43
3.2.2	代表的なソリトン方程式	45
3.3	逆散乱法	47
3.3.1	逆散乱法のアイデア	47
3.3.2	KdV 方程式の逆散乱法	48
3.3.3	逆散乱法の拡張	52
3.4	ソリトン解を求める直接法	54
3.4.1	双1次変換法	54
3.4.2	広田の方法	56
3.4.3	ベックルンド変換	59
3.5	極展開	61
3.5.1	KdV 方程式の極展開	61
3.5.2	広田の方法との関係	64
3.5.3	ベンジャミン-小野方程式の極展開	64
3.6	保存則	65
3.6.1	KdV 方程式の保存則	65
3.6.2	保存則の利用	66
3.6.3	ラックスの高次KdV方程式	67
4	可積分性と判定法	69
4.1	可積分とは	69
4.1.1	常微分方程式	69

4.1.2	ハミルトン力学系	70
4.1.3	偏微分方程式	70
4.2	コワレフスカヤとパニルベの仕事	71
4.2.1	コワレフスカヤのコマ	71
4.2.2	パニルベの超越関数	72
4.3	動く特異点の解析	73
4.3.1	動く特異点での解の振舞いの解析	73
4.3.2	非可積分方程式の特異点の構造	75
4.4	アプロビッツ-ラマニー-セガーの予想	76
4.4.1	KdV 方程式の相似変換	76
4.5	偏微分方程式の特異性解析	78
4.5.1	バーガース方程式	78
4.5.2	KdV 方程式	80
4.5.3	WTC法のまとめ	81
5	可積分性の破れ	84
5.1	可積分系の高次近似	85
5.1.1	ソリトンの高次近似	85
5.1.2	標準形解析	88
5.1.3	非線形シュレディンガー方程式の高次近似	91
5.2	非保存的摂動	93
5.2.1	KdV 方程式に対する摂動項	93
5.2.2	非線形シュレディンガー方程式に対する摂動項	94
5.3	摂動法	94
5.3.1	逆散乱法に基づく摂動	95
5.3.2	直接摂動法	99
5.3.3	保存則の利用	101
6	カオスへの移行	104
6.1	カオスとは	104
6.2	カオスの判定法	105

6.2.1	フーリエスペクトル	106	8.2	多次元ソリトンの可能性	158
6.2.2	ポアンカレ写像	109	8.2.1	ドリフト波方程式	159
6.2.3	リアプノフ指数	110	8.2.2	サハロフ-クズネツォフ方程式	160
6.2.4	フラクタル次元	112	8.2.3	2次元正規化長波方程式	163
6.3	さまざまなカオス状態	112	8.3	空間次元の増加による不安定	164
6.3.1	カオスへの移行	112	8.3.1	一般化 KdV 方程式と可積分性	165
6.3.2	カオスの強弱	113	8.3.2	2次元長波方程式の解の崩壊	165
6.3.3	カオスと自由度	113	8.3.3	非線形シュレディンガー方程式の解の崩壊	166
6.4	可積分系に近い場合のカオス	115	8.3.4	自己収束型特異性	167
6.4.1	非線形シュレディンガー方程式の摂動	115	8.4	高次元非保存系の空間構造とカオス	168
6.4.2	サイン-ゴールドン方程式の摂動	118	8.4.1	液 膜 流	168
6.5	非線形スペクトル診断	120	8.4.2	2次元ベネー方程式の解	170
6.5.1	逆 散 乱 法	120	9	微分方程式の解の安定性と数値計算法	175
7	可積分系から離れた場合のカオス	124	9.1	微分方程式の解の安定性	175
7.1	弱いカオスの記述	124	9.1.1	偏微分方程式の定常解の安定性	176
7.1.1	初期値問題とパルス相互作用	124	9.2	非線形常微分方程式の解の定性的考察	177
7.1.2	ソリトン格子モデル	132	9.2.1	解の性質の大局的な把握	177
7.2	不安定・散逸・分散方程式の他の例	138	9.2.2	特異点の分類	178
7.2.1	不安定 KdV パーガース方程式	138	9.2.3	リアプノフの安定性	181
7.2.2	負エネルギー波方程式	140	9.2.4	中心多様体理論	182
7.3	強いカオスの記述	142	9.2.5	高階微分方程式の定常解	183
7.3.1	変調不安定性と解	143	9.3	非線形発展方程式の数値解法	186
7.3.2	非線形シュレディンガー方程式とサハロフ方程式のスペクトル	146	9.3.1	差 分 法	186
7.3.3	ギンツブルグ-ランダウ方程式のスペクトル	148	9.3.2	関数近似法	188
7.3.4	蔵本-シバシンスキー方程式	151	9.3.3	KdV 方程式の差分解法の例	189
7.3.5	散逸ベンジャミン-小野方程式	153	9.3.4	擬スペクトル法	190
8	多次元のソリトンや空間的な散逸構造	156	9.4	ルンゲ-クッタ法	192
8.1	多次元ソリトンの例	156	9.5	スペクトル法による数値解法	194
8.1.1	カドムツェフ-ベトピアシビリ方程式	157			

参考書および解説論文 .....197

索 引 .....209