

目 次

| | | |
|-------|----------------------------|----|
| 1 | 序論——ソリトンからカオスへ | 1 |
| 1.1 | はじめに | 1 |
| 1.2 | 線形とは, 非線形とは | 4 |
| 1.2.1 | 粗視化と非線形性 | 5 |
| 1.3 | 非線形現象のモデル化 | 7 |
| 1.4 | 非線形発展方程式の解の存在, 一意性, 安定性 | 9 |
| 1.5 | 近似手法 | 11 |
| 1.5.1 | 物理系を近似する方法 | 11 |
| 1.5.2 | 近似方程式の解法 | 12 |
| 1.6 | 非線形偏微分方程式の解の定性的な考察 | 12 |
| 2 | 複雑な物理系から簡単な近似方程式を導く摂動展開の方法 | 15 |
| 2.1 | 摂動展開と近似方程式 | 15 |
| 2.1.1 | 線形分散関係 | 15 |
| 2.1.2 | 長波長近似 | 16 |
| 2.1.3 | 波束の変調 | 19 |
| 2.1.4 | 波と波との相互作用 | 21 |
| 2.2 | 散逸・不安定系への拡張 | 23 |
| 2.2.1 | 長波長不安定波 | 24 |
| 2.2.2 | 包絡線方程式 | 24 |
| 2.3 | 多重スケールの方法 | 26 |
| 2.4 | 水面波の近似方程式 | 27 |

| | | |
|-------|------------------|----|
| 2.4.1 | 基礎方程式 | 28 |
| 2.4.2 | 近似方程式の導出 | 31 |
| 2.4.3 | 長波方程式 | 34 |
| 3 | ソリトン方程式の解と解法 | 36 |
| 3.1 | ソリトン方程式の解の振舞い | 37 |
| 3.1.1 | KdV 方程式の解の性質 | 37 |
| 3.1.2 | ソリトンの発見 | 40 |
| 3.2 | ソリトン方程式の例 | 43 |
| 3.2.1 | ソリトンの生成 | 43 |
| 3.2.2 | 代表的なソリトン方程式 | 45 |
| 3.3 | 逆散乱法 | 47 |
| 3.3.1 | 逆散乱法のアイデア | 47 |
| 3.3.2 | KdV 方程式の逆散乱法 | 48 |
| 3.3.3 | 逆散乱法の拡張 | 52 |
| 3.4 | ソリトン解を求める直接法 | 54 |
| 3.4.1 | 双1次変換法 | 54 |
| 3.4.2 | 広田の方法 | 56 |
| 3.4.3 | ベックルンド変換 | 59 |
| 3.5 | 極展開 | 61 |
| 3.5.1 | KdV 方程式の極展開 | 61 |
| 3.5.2 | 広田の方法との関係 | 64 |
| 3.5.3 | ベンジャミン-小野方程式の極展開 | 64 |
| 3.6 | 保存則 | 65 |
| 3.6.1 | KdV 方程式の保存則 | 65 |
| 3.6.2 | 保存則の利用 | 66 |
| 3.6.3 | ラックスの高次KdV方程式 | 67 |
| 4 | 可積分性と判定法 | 69 |
| 4.1 | 可積分とは | 69 |
| 4.1.1 | 常微分方程式 | 69 |

| | | |
|-------|-----------------------|-----|
| 4.1.2 | ハミルトン力学系 | 70 |
| 4.1.3 | 偏微分方程式 | 70 |
| 4.2 | コワレフスカヤとパニルベの仕事 | 71 |
| 4.2.1 | コワレフスカヤのコマ | 71 |
| 4.2.2 | パニルベの超越関数 | 72 |
| 4.3 | 動く特異点の解析 | 73 |
| 4.3.1 | 動く特異点での解の振舞いの解析 | 73 |
| 4.3.2 | 非可積分方程式の特異点の構造 | 75 |
| 4.4 | アプロビッツ-ラマニー-セガーの予想 | 76 |
| 4.4.1 | KdV 方程式の相似変換 | 76 |
| 4.5 | 偏微分方程式の特異性解析 | 78 |
| 4.5.1 | バーガース方程式 | 78 |
| 4.5.2 | KdV 方程式 | 80 |
| 4.5.3 | WTC法のまとめ | 81 |
| 5 | 可積分性の破れ | 84 |
| 5.1 | 可積分系の高次近似 | 85 |
| 5.1.1 | ソリトンの高次近似 | 85 |
| 5.1.2 | 標準形解析 | 88 |
| 5.1.3 | 非線形シュレディンガー方程式の高次近似 | 91 |
| 5.2 | 非保存的摂動 | 93 |
| 5.2.1 | KdV 方程式に対する摂動項 | 93 |
| 5.2.2 | 非線形シュレディンガー方程式に対する摂動項 | 94 |
| 5.3 | 摂動法 | 94 |
| 5.3.1 | 逆散乱法に基づく摂動 | 95 |
| 5.3.2 | 直接摂動法 | 99 |
| 5.3.3 | 保存則の利用 | 101 |
| 6 | カオスへの移行 | 104 |
| 6.1 | カオスとは | 104 |
| 6.2 | カオスの判定法 | 105 |

| | | | | | |
|-------|------------------------------|-----|-------|---------------------|-----|
| 6.2.1 | フーリエスペクトル | 106 | 8.2 | 多次元ソリトンの可能性 | 158 |
| 6.2.2 | ポアンカレ写像 | 109 | 8.2.1 | ドリフト波方程式 | 159 |
| 6.2.3 | リアプノフ指数 | 110 | 8.2.2 | サハロフ-クズネツォフ方程式 | 160 |
| 6.2.4 | フラクタル次元 | 112 | 8.2.3 | 2次元正規化長波方程式 | 163 |
| 6.3 | さまざまなカオス状態 | 112 | 8.3 | 空間次元の増加による不安定 | 164 |
| 6.3.1 | カオスへの移行 | 112 | 8.3.1 | 一般化 KdV 方程式と可積分性 | 165 |
| 6.3.2 | カオスの強弱 | 113 | 8.3.2 | 2次元長波方程式の解の崩壊 | 165 |
| 6.3.3 | カオスと自由度 | 113 | 8.3.3 | 非線形シュレディンガー方程式の解の崩壊 | 166 |
| 6.4 | 可積分系に近い場合のカオス | 115 | 8.3.4 | 自己収束型特異性 | 167 |
| 6.4.1 | 非線形シュレディンガー方程式の摂動 | 115 | 8.4 | 高次元非保存系の空間構造とカオス | 168 |
| 6.4.2 | サイン-ゴールドン方程式の摂動 | 118 | 8.4.1 | 液 膜 流 | 168 |
| 6.5 | 非線形スペクトル診断 | 120 | 8.4.2 | 2次元ベネー方程式の解 | 170 |
| 6.5.1 | 逆 散 乱 法 | 120 | 9 | 微分方程式の解の安定性と数値計算法 | 175 |
| 7 | 可積分系から離れた場合のカオス | 124 | 9.1 | 微分方程式の解の安定性 | 175 |
| 7.1 | 弱いカオスの記述 | 124 | 9.1.1 | 偏微分方程式の定常解の安定性 | 176 |
| 7.1.1 | 初期値問題とパルス相互作用 | 124 | 9.2 | 非線形常微分方程式の解の定性的考察 | 177 |
| 7.1.2 | ソリトン格子モデル | 132 | 9.2.1 | 解の性質の大局的な把握 | 177 |
| 7.2 | 不安定・散逸・分散方程式の他の例 | 138 | 9.2.2 | 特異点の分類 | 178 |
| 7.2.1 | 不安定 KdV パーガース方程式 | 138 | 9.2.3 | リアプノフの安定性 | 181 |
| 7.2.2 | 負エネルギー波方程式 | 140 | 9.2.4 | 中心多様体理論 | 182 |
| 7.3 | 強いカオスの記述 | 142 | 9.2.5 | 高階微分方程式の定常解 | 183 |
| 7.3.1 | 変調不安定性と解 | 143 | 9.3 | 非線形発展方程式の数値解法 | 186 |
| 7.3.2 | 非線形シュレディンガー方程式とサハロフ方程式のスペクトル | 146 | 9.3.1 | 差 分 法 | 186 |
| 7.3.3 | ギンツブルグ-ランダウ方程式のスペクトル | 148 | 9.3.2 | 関数近似法 | 188 |
| 7.3.4 | 蔵本-シバシンスキー方程式 | 151 | 9.3.3 | KdV 方程式の差分解法の例 | 189 |
| 7.3.5 | 散逸ベンジャミン-小野方程式 | 153 | 9.3.4 | 擬スペクトル法 | 190 |
| 8 | 多次元のソリトンや空間的な散逸構造 | 156 | 9.4 | ルンゲ-クッタ法 | 192 |
| 8.1 | 多次元ソリトンの例 | 156 | 9.5 | スペクトル法による数値解法 | 194 |
| 8.1.1 | カドムツェフ-ベトピアシビリ方程式 | 157 | | | |

参考書および解説論文197

索 引209