

目 次

| | |
|--|----------|
| 1. ヒルベルト空間 | 1 |
| 1.1 ベクトル空間 | 1 |
| 1.1.1 ベクトル空間の公理系 | 1 |
| 1.1.2 いくつかの基本概念 | 4 |
| 1.1.3 ベクトル空間の例 | 5 |
| 1.1.4 ベクトル空間の直和 | 9 |
| 1.2 内積空間 | 9 |
| 1.2.1 内積空間の公理系 | 9 |
| 1.2.2 内積空間の幾何学 | 13 |
| 1.2.3 正規直交系の存在—グラム-シュミットの直交化法 | 19 |
| 1.3 ヒルベルト空間 | 20 |
| 1.3.1 内積空間の位相 | 20 |
| 1.3.2 完備性とヒルベルト空間 | 23 |
| 1.3.3 ヒルベルト空間の直和 | 28 |
| 1.4 正射影定理 | 30 |
| 1.5 完全正規直交系 | 36 |
| 1.6 $L^2(\mathbf{R}^d)$ におけるいくつかの基本的事実 | 41 |
| 1.6.1 基本的な関数空間と $L^2(\mathbf{R}^d)$ の可分性 | 41 |
| 1.6.2 閉区間上の L^2 空間とフーリエ級数 | 44 |
| 練習問題 | 47 |

| | |
|-------------------------------|-----------|
| 2. ヒルベルト空間上の線形作用素 | 50 |
| 2.1 線形作用素 | 50 |
| 2.2 有界線形作用素 | 56 |
| 2.3 有界線形汎関数とリースの表現定理 | 59 |
| 2.4 ユニタリ作用素とヒルベルト空間の同型 | 60 |
| 2.5 有界作用素の基本的性質 | 65 |
| 2.5.1 稠密に定義された有界作用素の拡大 | 65 |
| 2.5.2 有界作用素の空間 | 66 |
| 2.5.3 有界作用素の無限級数とノイマン級数 | 69 |
| 2.5.4 ヒルベルト空間と有界作用素の空間の収束の諸位相 | 71 |
| 2.6 非有界作用素 | 72 |
| 2.7 作用素の拡大と共役作用素 | 76 |
| 2.7.1 作用素の拡大 | 76 |
| 2.7.2 共役作用素 | 77 |
| 2.8 閉作用素と可閉作用素 | 80 |
| 2.8.1 閉作用素 | 80 |
| 2.8.2 可閉作用素 | 81 |
| 2.8.3 作用素のグラフ, 可閉性に対する条件 | 83 |
| 2.9 レゾルヴェントとスペクトル | 85 |
| 2.9.1 作用素の固有値, 固有ベクトル, 固有空間 | 85 |
| 2.9.2 レゾルヴェント集合とスペクトル | 87 |
| 2.9.3 レゾルヴェントの基本的性質 | 88 |
| 2.9.4 スペクトルの基本的性質 | 90 |
| 2.10 自己共役作用素 | 94 |
| 2.10.1 対称作用素 | 95 |
| 2.10.2 自己共役作用素 | 96 |
| 2.11 自己共役作用素のスペクトル | 99 |
| 練習問題 | 103 |

| | |
|---------------------------------|------------|
| 3. 作用素解析とスペクトル定理 | 107 |
| 3.1 正射影作用素 | 107 |
| 3.2 単位の分解と作用素値汎関数 | 110 |
| 3.2.1 単位の分解と測度 | 110 |
| 3.2.2 作用素値汎関数 | 113 |
| 3.3 作用素値汎関数の性質—作用素解析 | 118 |
| 3.4 スペクトル定理 | 122 |
| 3.4.1 自己共役作用素のスペクトル表示 | 122 |
| 3.4.2 自己共役作用素の関数とそのユニタリ変換 | 124 |
| 3.4.3 スペクトル測度と固有値 | 126 |
| 3.4.4 スペクトル測度の台とスペクトル | 127 |
| 練習問題 | 131 |
| 4. 自己共役作用素の解析 | 133 |
| 4.1 自己共役性に対する判定条件 | 133 |
| 4.2 本質的自己共役性 | 135 |
| 4.3 強連続1パラメータユニタリ群とストーンの定理 | 138 |
| 4.3.1 ヒルベルト空間値関数と作用素値関数 | 138 |
| 4.3.2 自己共役作用素から定まるユニタリ作用素の族 | 140 |
| 4.3.3 強連続1パラメータユニタリ群とストーンの定理 | 142 |
| 4.4 自己共役作用素の強可換性 | 146 |
| 4.4.1 強可換性 | 146 |
| 4.4.2 強可換な自己共役作用素の組の関数 | 151 |
| 練習問題 | 154 |
| 5. 偏微分作用素の本質的自己共役性とスペクトル | 156 |
| 5.1 急減少関数の空間とフーリエ変換 | 156 |
| 5.2 偏微分作用素とその本質的自己共役性 | 164 |
| 5.3 スペクトル | 167 |
| 5.4 一般化されたラプラシアン | 167 |

| | |
|---|------------|
| 練習問題 | 168 |
| 6. 量子力学の数学的原理 | 169 |
| 6.1 量子力学とはどういうものか | 169 |
| 6.2 量子力学の基礎概念—状態と物理量 | 174 |
| 6.3 ハイゼンベルクの不確定性関係 | 182 |
| 6.4 正準量子化 | 184 |
| 6.4.1 正準交換関係 | 185 |
| 6.4.2 物理量の例 | 189 |
| 6.4.3 CCR の表現としての量子力学— CCR の表現の一意性の問題についての注意 | 195 |
| 6.5 状態の時間発展—シュレーディンガー方程式 | 197 |
| 6.6 物理量の時間発展—ハイゼンベルクの運動方程式 | 204 |
| 6.7 最低エネルギーに対する変分原理 | 208 |
| 練習問題 | 210 |
| 7. 量子調和振動子 | 214 |
| 7.1 量子調和振動子のハミルトニアンと固有値問題 | 214 |
| 7.2 固有値問題の抽象的定式化とその解 | 217 |
| 7.3 ハミルトニアンの特値と固有関数 | 220 |
| 練習問題 | 225 |
| 付録 A ルベーグ積分論における基本定理 | 229 |
| 付録 B 確率論の基本的事項 | 233 |
| 練習問題解答 | 237 |
| あとがき | 263 |
| 索引 | 269 |