

目 次

1. ヒルベルト空間	1
1.1 ベクトル空間	1
1.1.1 ベクトル空間の公理系	1
1.1.2 いくつかの基本概念	4
1.1.3 ベクトル空間の例	5
1.1.4 ベクトル空間の直和	9
1.2 内積空間	9
1.2.1 内積空間の公理系	9
1.2.2 内積空間の幾何学	13
1.2.3 正規直交系の存在—グラム-シュミットの直交化法	19
1.3 ヒルベルト空間	20
1.3.1 内積空間の位相	20
1.3.2 完備性とヒルベルト空間	23
1.3.3 ヒルベルト空間の直和	28
1.4 正射影定理	30
1.5 完全正規直交系	36
1.6 $L^2(\mathbf{R}^d)$ におけるいくつかの基本的事実	41
1.6.1 基本的な関数空間と $L^2(\mathbf{R}^d)$ の可分性	41
1.6.2 閉区間上の L^2 空間とフーリエ級数	44
練習問題	47

2. ヒルベルト空間上の線形作用素	50
2.1 線形作用素	50
2.2 有界線形作用素	56
2.3 有界線形汎関数とリースの表現定理	59
2.4 ユニタリ作用素とヒルベルト空間の同型	60
2.5 有界作用素の基本的性質	65
2.5.1 稠密に定義された有界作用素の拡大	65
2.5.2 有界作用素の空間	66
2.5.3 有界作用素の無限級数とノイマン級数	69
2.5.4 ヒルベルト空間と有界作用素の空間の収束の諸位相	71
2.6 非有界作用素	72
2.7 作用素の拡大と共役作用素	76
2.7.1 作用素の拡大	76
2.7.2 共役作用素	77
2.8 閉作用素と可閉作用素	80
2.8.1 閉作用素	80
2.8.2 可閉作用素	81
2.8.3 作用素のグラフ, 可閉性に対する条件	83
2.9 レゾルヴェントとスペクトル	85
2.9.1 作用素の固有値, 固有ベクトル, 固有空間	85
2.9.2 レゾルヴェント集合とスペクトル	87
2.9.3 レゾルヴェントの基本的性質	88
2.9.4 スペクトルの基本的性質	90
2.10 自己共役作用素	94
2.10.1 対称作用素	95
2.10.2 自己共役作用素	96
2.11 自己共役作用素のスペクトル	99
練習問題	103

3. 作用素解析とスペクトル定理	107
3.1 正射影作用素	107
3.2 単位の分解と作用素値汎関数	110
3.2.1 単位の分解と測度	110
3.2.2 作用素値汎関数	113
3.3 作用素値汎関数の性質—作用素解析	118
3.4 スペクトル定理	122
3.4.1 自己共役作用素のスペクトル表示	122
3.4.2 自己共役作用素の関数とそのユニタリ変換	124
3.4.3 スペクトル測度と固有値	126
3.4.4 スペクトル測度の台とスペクトル	127
練習問題	131
4. 自己共役作用素の解析	133
4.1 自己共役性に対する判定条件	133
4.2 本質的自己共役性	135
4.3 強連続1パラメータユニタリ群とストーンの定理	138
4.3.1 ヒルベルト空間値関数と作用素値関数	138
4.3.2 自己共役作用素から定まるユニタリ作用素の族	140
4.3.3 強連続1パラメータユニタリ群とストーンの定理	142
4.4 自己共役作用素の強可換性	146
4.4.1 強可換性	146
4.4.2 強可換な自己共役作用素の組の関数	151
練習問題	154
5. 偏微分作用素の本質的自己共役性とスペクトル	156
5.1 急減少関数の空間とフーリエ変換	156
5.2 偏微分作用素とその本質的自己共役性	164
5.3 スペクトル	167
5.4 一般化されたラプラシアン	167

練習問題	168
6. 量子力学の数学的原理	169
6.1 量子力学とはどういうものか	169
6.2 量子力学の基礎概念—状態と物理量	174
6.3 ハイゼンベルクの不確定性関係	182
6.4 正準量子化	184
6.4.1 正準交換関係	185
6.4.2 物理量の例	189
6.4.3 CCR の表現としての量子力学— CCR の表現の一意性の問題についての注意	195
6.5 状態の時間発展—シュレーディンガー方程式	197
6.6 物理量の時間発展—ハイゼンベルクの運動方程式	204
6.7 最低エネルギーに対する変分原理	208
練習問題	210
7. 量子調和振動子	214
7.1 量子調和振動子のハミルトニアンと固有値問題	214
7.2 固有値問題の抽象的定式化とその解	217
7.3 ハミルトニアンの特値と固有関数	220
練習問題	225
付録 A ルベーグ積分論における基本定理	229
付録 B 確率論の基本的事項	233
練習問題解答	237
あとがき	263
索引	269