

目 次

第 I 部 偏微分方程式の解の漸近挙動	1
1. 熱方程式の解の時間無限大での挙動	2
1.1 時間無限大での解の漸近挙動	2
1.1.1 解の減衰評価	5
1.1.2 $L^p - L^q$ 評価	7
1.1.3 微分の $L^p - L^q$ 評価	8
1.1.4 時間無限大での漸近挙動についての定理	10
1.1.5 解の表示を用いる証明	10
1.1.6 平均値の定理の積分形	12
1.2 方程式の構造と自己相似解	12
1.2.1 スケール変換不変性	13
1.2.2 熱方程式の保存量	14
1.2.3 保存量を不変にするスケール変換	15
1.2.4 スケール変換の性質のまとめ	16
1.2.5 自己相似解	16
1.2.6 漸近公式のスケール変換による表記	17
1.2.7 スケール変換による漸近公式の証明の考え方	17
1.3 コンパクト性	18
1.3.1 連続関数のつくる関数族	20
1.3.2 Ascoli-Arzelà 型コンパクト性定理	23
1.3.3 スケール変換された関数族の相対コンパクト性	23
1.3.4 空間方向の減衰評価	26
1.3.5 収束部分列の存在定理	27
1.3.6 補題	27

1.4	極限関数の特徴づけ	28	2.4.1	渦度と速度の評価	62
1.4.1	初期値の極限	29	2.4.2	渦度の微分の評価	67
1.4.2	熱方程式の初期値問題の弱形式	29	2.4.3	渦度の空間方向の減衰評価	73
1.4.3	初期値問題の弱解	30	2.5	漸近公式の証明	77
1.4.4	熱方程式の解の列の極限について	32	2.5.1	極限関数の弱解としての特徴づけ	79
1.4.5	スケール変換された関数族の極限の特徴	33	2.5.2	極限関数の評価	82
1.4.6	初期値がデルタ関数の場合の一意性定理	34	2.5.3	弱解の満たす積分方程式	87
1.4.7	漸近公式 (1.9) のスケール変換による証明の完成	35	2.5.4	極限方程式の解の一意性	88
1.4.8	一意性定理についての注意	35	2.5.5	漸近公式の証明の完成	90
2.	渦度方程式の時間無限大での解の挙動	38	2.6	Burgers 渦の形成	91
2.1	Navier-Stokes 方程式と渦度方程式	39	2.6.1	Burgers 渦への収束	93
2.1.1	渦度	40	2.7	Navier-Stokes 方程式の自己相似解とその周辺	94
2.1.2	速度と渦度	41	2.7.1	渦度漸近挙動の研究小史	94
2.1.3	Biot-Savart の法則	42	2.7.2	解の存在問題	98
2.1.4	渦度方程式の導出	43	2.7.3	自己相似解	100
2.2	時間無限大での漸近挙動	44	3.	種々の方程式の自己相似解	106
2.2.1	一意存在定理	44	3.1	多孔質媒質の方程式	106
2.2.2	渦度の漸近挙動についての定理	45	3.1.1	総質量を保存する自己相似解	108
2.2.3	スケール変換不変性	46	3.1.2	弱解	109
2.2.4	総渦量の保存	47	3.1.3	漸近公式	110
2.2.5	回転対称自己相似解	48	3.2	後ろ向き自己相似解の役割	111
2.3	輸送項のある熱方程式の解の大域的 $L^q - L^1$ 評価	49	3.2.1	軸対称平均曲率流方程式	111
2.3.1	基本 $L^q - L^1$ 評価	50	3.2.2	後ろ向き自己相似解と相似変数	112
2.3.2	L^r ノルムの時間変化率—積分等式	51	3.2.3	非自明自己相似解の非存在	116
2.3.3	L^1 ノルムの非増加性	52	3.2.4	ちぎれ点付近での解の漸近挙動	119
2.3.4	Nash の不等式の応用	53	3.2.5	単調公式	124
2.3.5	基本 $L^q - L^1$ 評価の証明	56	3.2.6	半線形熱方程式, 調和写像流方程式の場合	129
2.3.6	基本 $L^q - L^1$ 評価の拡張	58	3.3	非拡散型方程式について	134
2.3.7	最大値原理	59	3.3.1	非線形 Schrödinger 方程式	134
2.3.8	非負性保存原理	59	3.3.2	KdV 方程式	137
2.4	渦度方程式の解の評価	61			

第 II 部 知っておくと便利な解析学的諸事実 141

4. 熱方程式の解の種々の性質 142

4.1 合成積と Young の不等式および解の $L^p - L^q$ 評価 142

4.1.1 Young の不等式 143

4.1.2 $L^p - L^q$ 評価の証明 146

4.1.3 合成積の代数的性質 147

4.1.4 合成積と微分の交換 148

4.1.5 極限と微分の交換 150

4.1.6 熱方程式の解の滑らかさ 151

4.2 熱方程式の初期値 152

4.2.1 初期値への収束 152

4.2.2 一様連続性 152

4.2.3 収束定理 153

4.2.4 系 155

4.2.5 収束定理 §4.2.3 の応用 155

4.3 非斉次熱方程式 156

4.3.1 解の表示について 157

4.3.2 非斉次方程式の解——初期値ゼロの場合 158

4.3.3 非斉次方程式の解——一般の場合 162

4.3.4 非斉次項が $t = 0$ で特異な場合 163

4.4 熱方程式の解の一意性 167

4.4.1 一意性定理 §1.4.6 の証明 167

4.4.2 基本一意性定理 168

4.4.3 非斉次方程式について 171

4.4.4 輸送項のある熱方程式の一意可解性 172

4.4.5 基本解の定義とその性質 178

4.5 部分積分法 182

4.5.1 全空間での部分積分の例 183

4.5.2 全空間での発散定理 184

4.5.3 有界領域での部分積分法 184

5. コンパクト性定理 186

5.1 定義域がコンパクトな場合 186

5.1.1 Ascoli-Arzelà の定理 186

5.1.2 関数解析的な記述 189

5.2 定義域がコンパクトでない場合 190

5.2.1 Ascoli-Arzelà 型コンパクト性定理 190

5.2.2 部分列の構成 190

5.2.3 同程度減衰性と一様収束 190

5.2.4 補題 §1.3.6 の証明について 191

5.2.5 高階導関数の収束 192

6. 微分積分学の不等式 194

6.1 Gagliardo-Nirenberg の不等式と Nash の不等式 194

6.1.1 Gagliardo-Nirenberg の不等式 195

6.1.2 Nash の不等式 196

6.1.3 Nash の不等式の証明 197

6.1.4 Gagliardo-Nirenberg の不等式の証明 ($\sigma < 1$ の場合) 200

6.1.5 証明法について 204

6.1.6 注意 206

6.2 Riesz ポテンシャルの有界性 207

6.2.1 Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式 207

6.2.2 分布関数と p 乗可積分性 208

6.2.3 Lorentz 空間 209

6.2.4 Marcinkiewicz の補間定理 210

6.2.5 Riesz ポテンシャルの Gauss 核による表現 217

6.2.6 有界性の証明 218

6.2.7 Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式の証明の完成 219

6.3 Sobolev の不等式 220

6.3.1 Laplacian の逆作用素 ($n \geq 3$) 220

6.3.2 Laplacian の逆作用素 ($n = 2$) 222

6.3.3 Sobolev の不等式の証明 ($r > 1$) 225

6.3.4 Sobolev の不等式 ($r = 1$) の初等的証明 225

6.3.5	Newton ポテンシャル	227
6.3.6	積分記号下の微分についての注意	230
6.4	特異積分作用素の有界性	231
6.4.1	立方体分割	231
6.4.2	Calderón-Zygmund の不等式	234
6.4.3	L^2 有界性	237
6.4.4	弱 L^1 評価	238
6.4.5	双対性の応用と証明の完成	244
7.	積分論の収束定理	247
7.1	積分と極限の順序交換	247
7.1.1	優収束定理	248
7.1.2	Fatou の補題	250
7.1.3	単調収束定理	251
7.1.4	Riemann 積分の枠組での収束定理	251
7.2	積分と微分の順序交換	252
7.2.1	積分記号下の微分	252
7.2.2	積分の順序交換	253
7.3	有界線形作用素としての拡張	254
	練習問題の解答	257
	文献についての補足	279
	記号表	283
	索引	287