目　次

まえがき　i

表紙・裏表紙に載っている論文について　vii

第 1 章　4 次元時空とシュワルツシルド計量　1

1.1　線素と計量　1

1.2　シュワルツシルド時空の性質　5

1.2.1　シュワルツシルド計量　5

1.2.2　シュワルツシルド計量の動径座標の意味：曲がった空間　6

1.2.3　動径方向に進む光　8

1.2.4　ブラックホールの密度　9

1.3　GPS とシュワルツシルド時空　11

第 2 章　一般相対論の基礎　15

2.1　物理量の表現：ベクトル　16

2.1.1　ベクトルの基底と成分　17

2.1.2　基底変換と座標変換　18

2.1.3　ベクトルの微分　20

2.1.4　接続係数の変換則　22

2.2　物理量の表現：双対ベクトル　23

2.2.1　双対空間　23

2.2.2　内積と計量　24

2.2.3　双対ベクトルの変換則と微分　26

2.2.4　量子論における表現との対応　28

2.3 物理量の表現：テンソル …… 30
2.3.1 テンソル積と 2 階テンソル …… 30
2.3.2 テンソル成分の添字の上げ下げ …… 33
2.3.3 接続係数とクリストッフェル記号 …… 34
2.3.4 高階テンソル …… 37
2.3.5 テンソルの成分だけを用いた相対論の表現 …… 39
2.4 測地線の方程式 …… 41
2.5 重力場の方程式 …… 44
2.5.1 時空と物質 …… 44
2.5.2 リーマンの曲率テンソル …… 45
2.5.3 エネルギー運動量テンソル …… 46
2.5.4 アインシュタイン方程式 …… 47

第 3 章 球対称時空 49

3.1 球対称時空に対する計量とアインシュタイン方程式 …… 49
3.2 完全流体に対するエネルギー運動量保存則 …… 52
3.3 球対称時空における完全流体の運動方程式 …… 54
3.3.1 アインシュタイン方程式の tt 成分の変形 …… 55
3.3.2 アインシュタイン方程式の rr 成分の変形 …… 56
3.3.3 まとめ …… 56
3.4 圧力が無視できる物質の球対称重力収縮 …… 57
3.5 球対称定常時空とトールマン-オッペンハイマー-ボルコフ方程式 …… 59
3.6 シュワルツシルド解 …… 61
3.6.1 シュワルツシルドの内部解 …… 62
3.6.2 シュワルツシルドの外部解 …… 64
3.6.3 シュワルツシルドの内部解の適用限界 …… 65
3.7 重力質量と固有質量 …… 66
3.8 球対称真空解とバーコフの定理 …… 67
3.9 一様等方宇宙モデル：フリードマン-ロバートソン-ウォーカー解 …… 68
3.9.1 宇宙原理とロバートソン-ウォーカー計量 …… 68
3.9.2 アインシュタイン方程式からフリードマン方程式へ …… 70
3.9.3 宇宙の状態方程式 …… 73

3.9.4 宇宙の加速膨張の発見 …… 74
3.9.5 ダークエネルギーに対する制限 …… 80

第 4 章 重力波 82

4.1 アインシュタイン方程式の弱場近似 …… 82
4.1.1 アインシュタイン方程式の線形化 …… 83
4.1.2 線形化されたアインシュタイン方程式の波動解 …… 85
4.2 重力波の平面波解 …… 86
4.2.1 TT (Transverse-Traceless) ゲージ …… 87
4.2.2 重力波の偏光 …… 88
4.3 測地線偏差の方程式 …… 90
4.4 重力波の検出原理 …… 91
4.4.1 レーザー干渉計検出器 …… 92
4.4.2 共振型検出器 …… 92
4.5 大局的保存則と重力場のエネルギー運動量擬テンソル …… 93
4.6 重力波のエネルギー運動量擬テンソルに対するアイザックソンの式 …… 96
4.6.1 $g^{\mu\nu}$ …… 97
4.6.2 $S^{\mu}{}_{\beta\nu} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}{}^{(0)}_{\beta\nu}$ …… 97
4.6.3 $R^{(1)}_{\alpha\beta}$ …… 98
4.6.4 $R^{(2)}_{\alpha\beta}$ …… 100
4.6.5 背景時空に対するアインシュタイン方程式と重力波のエネルギー運動量擬テンソル …… 101
4.6.6 空間平均操作の性質 …… 102
4.6.7 TT ゲージにおける重力波のエネルギー運動量擬テンソル …… 103
4.7 重力波輻射の 4 重極公式 …… 105
4.7.1 重力波の遅延解と質量分布の 4 重極モーメント …… 105
4.7.2 質量分布の換算 4 重極モーメント …… 106
4.7.3 TT ゲージ化 …… 107
4.7.4 重力波のエネルギー放出率 …… 108

第 5 章　重力レンズ天文学 **111**
5.1　重力レンズの分類 …… 111
5.2　レンズ方程式 …… 113
5.3　光線の曲がり角 …… 114
5.3.1　重力場中で光線が曲がる理由 …… 114
5.3.2　重力ポテンシャルと光線の曲がり角 …… 116
5.3.3　薄いレンズ近似における曲がり角とレンズの質量面密度 …… 118
5.4　レンズポテンシャルとレンズ方程式 …… 119
5.5　円対称重力レンズの定性的振舞い …… 121
5.5.1　円対称レンズに対する曲がり角 …… 121
5.5.2　点レンズ解 …… 122
5.5.3　有限サイズ天体に対する円対称レンズ解 …… 124
5.6　レンズ変換行列：コンバージェンスとシア …… 126
5.7　円対称レンズの critical curve と像の変形 …… 128
5.8　面輝度定理 …… 131
5.9　重力レンズ像の増光率 …… 134
5.10　重力マイクロレンズと MACHO …… 135
5.10.1 マイクロレンズの光度曲線 …… 136
5.10.2 円対称重力レンズに対する断面積 …… 138
5.10.3 マイクロレンズの確率 …… 139
5.10.4 マイクロレンズのイベントレート …… 140
5.10.5 マイクロレンズの発見 …… 142

例題集 **145**
A　計量テンソルの行列式と 4 元ベクトルの発散 …… 145
B　変分原理を用いたアインシュタイン方程式の導出 …… 148
C　球対称時空に対するクリストッフェル記号 …… 151
D　球対称時空に対するアインシュタインテンソル …… 153
E　ダスト球の重力収縮解 …… 160
F　ダークエネルギーの状態方程式とビッグリップ …… 162
G　宇宙論的距離の表式 …… 165
H　連星から放出される重力波 …… 170

I　フェルマーの原理 …… 172
J　フェルマーの原理を用いたレンズ方程式の導出 …… 175
K　円対称重力レンズ天体に対する曲がり角 α …… 178

索引 **183**