

## 目 次

まえがき  
本書の構成

1	線形計算の予備知識	1
1.1	線形計算に現れる行列	1
1.2	行列の代数的性質	5
1.3	誤差	11
	第1章ノート	13
	第1章問題	14
2	連立1次方程式 I : 消去法	15
2.1	概説	15
2.2	消去法	16
2.2.1	Gauss の消去法	16
2.2.2	LU 分解	23
2.2.3	Cholesky 分解	28
2.2.4	反復改良	31
2.2.5	解の精度	32
2.3	丸め誤差評価	35
2.3.1	後退誤差解析	35
2.3.2	後退誤差解析の中心補題の証明*	40
2.4	ブロック三角化	44
2.4.1	並べ換えによる分解	44
2.4.2	Dulmage-Mendelsohn 分解の数理*	51
2.4.3	Dulmage-Mendelsohn 分解の算法*	56

2.4.4 分解原理*	58
第2章ノート	59
第2章問題	60
<b>3 連立1次方程式Ⅱ：反復法</b> .....	<b>63</b>
3.1 反復法の概念	63
3.1.1 モデル問題	63
3.1.2 Jacobi 法	64
3.1.3 収束性	66
3.2 Gauss-Seidel 法	68
3.2.1 算法の導出	68
3.2.2 モデル問題に対する解析	69
3.2.3 収束定理	70
3.3 逐次過緩和法(SOR 法)	71
3.3.1 算法の導出	71
3.3.2 モデル問題に対する解析	73
3.3.3 収束定理	75
3.3.4 加速パラメータの最適値	78
3.4 正則分離と収束性*	82
3.5 Chebyshev 加速法	86
3.5.1 算法の導出	86
3.5.2 漸化式	89
3.5.3 収束率	91
3.6 ADI 法	92
3.6.1 算法の導出	92
3.6.2 収束定理	95
3.6.3 モデル問題に対する解析	96
3.6.4 非定常反復*	98
3.7 マルチグリッド法	106
3.7.1 2段グリッド法	106
3.7.2 マルチグリッド法の算法	109
3.7.3 モデル問題に対する解析*	113
3.7.4 代数的マルチグリッド法*	131

第3章ノート	136
--------	-----

第3章問題	137
-------	-----

<b>4 連立1次方程式Ⅲ：共役勾配法</b> .....	<b>143</b>
4.1 対称行列に対する共役勾配法	143
4.1.1 算法の導出	143
4.1.2 収束性	150
4.1.3 前処理	153
4.1.4 残差直交性に基づく算法の導出	157
4.2 非対称行列に対する共役勾配法系の算法	162
4.2.1 概 説	162
4.2.2 一般化共役残差法(GCR 法)	164
4.2.3 Orthomin( $m$ ) 法	170
4.2.4 一般化最小残差法(GMRES 法)	173
4.2.5 残差直交性をもつ解法	177
4.2.6 双共役勾配法(BCG 法)	181
4.2.7 擬似最小残差法(QMR 法)	185
4.2.8 安定化双共役勾配法(BiCGSTAB 法)	190
4.2.9 BiCGSTAB( $\ell$ ) 法*	195
4.3 Krylov 部分空間法	201
4.3.1 Krylov 部分空間	201
4.3.2 算法の導出原理	202
4.4 自己随伴行列に対する共役勾配法*	204
4.4.1 自己随伴行列	204
4.4.2 算 法	205
4.4.3 収束性	207
4.4.4 残差多項式と Lanczos 原理	208
4.4.5 前処理	209
4.5 短い漸化式による解法*	212
4.5.1 漸化式の長さとは近似解の最適性	213
4.5.2 一般的考察	215
4.5.3 正規行列に対する共役勾配法	216
4.5.4 Faber-Manteuffel の定理	219

第4章ノート	221
第4章問題	225
<b>5 最小2乗問題</b> .....	231
5.1 概 説	231
5.2 解 法	232
5.2.1 正規方程式をつくる方法	232
5.2.2 QR分解による方法	232
5.2.3 特異値分解による方法	233
第5章ノート	235
第5章問題	235
<b>6 直交行列による基本変換</b> .....	237
6.1 基本直交変換	237
6.1.1 Householder変換	237
6.1.2 Givens変換	239
6.2 三角化(QR分解)	240
6.2.1 Gram-Schmidtの直交化	241
6.2.2 Householder変換による方法	242
6.2.3 Givens変換による方法	244
6.3 Hessenberg化・3重対角化	245
6.3.1 Householder変換による方法	245
6.3.2 Givens変換による方法	247
6.4 上2重対角化	248
6.4.1 Householder変換による方法	248
6.4.2 Givens変換による方法	249
第6章ノート	249
第6章問題	250
<b>7 固有値問題Ⅰ：一般行列</b> .....	251
7.1 概 説	251

7.1.1 固有値問題	251
7.1.2 解法の概観	253
7.1.3 Schur分解	254
7.2 べき乗法	256
7.2.1 基本形	256
7.2.2 逆反復	258
7.2.3 シフト	259
7.2.4 減 次	259
7.3 同時反復法	260
7.4 QR法	265
7.5 LR法	267
7.5.1 LR法(基本形)	268
7.5.2 Cholesky LR法	271
7.6 Rayleigh-Ritzの技法	276
7.7 Arnoldi法とLanczos法	280
7.7.1 Arnoldi法	280
7.7.2 Lanczos法	282
7.7.3 Lanczos法と共役勾配法*	287
7.8 Jacobi-Davidson法	289
7.8.1 算 法	289
7.8.2 他の算法との関係*	292
第7章ノート	296
第7章問題	297
<b>8 固有値問題Ⅱ：対称行列</b> .....	299
8.1 2分法	299
8.2 分割統治法	300
8.3 Jacobi法	303
8.3.1 算 法	304
8.3.2 収束性*	306
8.3.3 巡回Jacobi法	311
第8章ノート	312
第8章問題	312

9 特異値分解 .....	315
9.1 概説 .....	315
9.2 dqds法の算法 .....	316
9.3 dqds法の収束性 .....	321
第9章ノート .....	324
第9章問題 .....	324
問題解答 .....	327
参考文献 .....	349
記号表 .....	365
用語に含まれる人名の読み方 .....	367
索引 .....	369