

目次

まえがき	iii
第1章 外積代数	1
1.1 3次元ベクトル空間の外積代数	1
1.1.1 2重外積ベキ	1
1.1.2 三重外積ベキ	2
1.1.3 まとめ	3
1.1.4 外積	3
1.2 有限次元ベクトル空間の外積代数	4
1.2.1 置換	4
1.2.2 外積ベキの構成	4
1.3 多重交代写像と外積	7
1.3.1 普遍交代写像定理	8
1.3.2 外積	9
1.3.3 定理:外積の性質	10
1.3.4 例	10
1.3.5 補題:線形独立とくさび積の関係	10
1.4 線形変換の外積ベキ	11
1.4.1 行列式	11
1.4.2 線形変換のその他の外積	12
1.4.3 同型 $\Lambda^p(V^*) \cong (\Lambda^p V)^*$	12
1.5 演習	14
1.6 内積	16
1.6.1 内積の定義	16
1.6.2 例	17
1.6.3 直交基底とその符号数	17
1.6.4 内積空間の一次形式	17
1.6.5 外積ベキの内積	18
1.7 ホッジスター作用素	19

1.7.1	例：3次元でのホッジスター作用素	20
1.7.2	基底のベクトルへのホッジスター作用素の効果	21
1.7.3	例	22
1.7.4	公式	22
1.8	演習	23
1.9	歴史および文献案内	24
第2章	ユークリッド空間での微分形式の計算	25
2.1	接空間——ユークリッド空間の場合	25
2.1.1	微分	27
2.1.2	ベクトル場のリー微分	27
2.1.3	リー微分の例	28
2.2	ユークリッド空間の微分形式	28
2.2.1	記法 $\omega \cdot X$	29
2.2.2	微分形式の定義	30
2.2.3	p -形式の空間	31
2.3	微分形式に対する演算	31
2.3.1	微分形式の外積	31
2.3.2	微分形式上のホッジスター作用素	32
2.3.3	微分形式のテンソル積	32
2.3.4	普遍双線形写像	33
2.4	演習	34
2.5	外微分	35
2.5.1	定理：外微分の存在と一意性	36
2.6	演習	39
2.7	写像の微分	41
2.7.1	チェイン・ルール	41
2.7.2	多変数の解析による微分の解釈	41
2.8	微分形式の引き戻し	42
2.8.1	引き戻しの定義	43
2.8.2	シャレタ解釈	43
2.8.3	多変数の解析を使った引き戻しの解釈	43
2.8.4	例：球面座標	44
2.8.5	引き戻しの形式的性質	45
2.8.6	球面座標；続き	46
2.9	演習	46
2.10	歴史および参考文献	48
2.11	補遺：マクスウェルの方程式	48

2.11.1	演習	50
第3章	ユークリッド空間の部分多様体	51
3.1	はめ込みと沈めこみ	51
3.1.1	はめ込みの例	52
3.1.2	沈めこみの例	52
3.2	部分多様体の定義と例	53
3.2.1	R^{n+k} の n 次元部分多様体の定義	54
3.2.2	例： n 次元球面	54
3.2.3	例： n 次元トーラス	55
3.2.4	例： n 次元回転双曲面	55
3.2.5	例：滑らかな関数のグラフ	56
3.2.6	部分多様体でない例	57
3.3	演習	57
3.4	径数づけ	58
3.4.1	注意！径数づけの像は部分多様体である必要はないこと	59
3.4.2	標準的な例	59
3.4.3	陰関数の径数づけ	61
3.5	部分多様体の径数づけに陰関数定理を使う	61
3.5.1	陰関数定理	61
3.5.2	陰関数定理の幾何学的定式化	62
3.5.3	工夫したやり方	62
3.5.4	1点での部分多様体の接空間	64
3.5.5	異なる径数づけへの変換	65
3.6	部分多様体としての行列群	66
3.6.1	R 上の一般線形群	66
3.6.2	行列の積と逆が滑らかであること	67
3.6.3	$GL_n(R)$ のリー部分群	67
3.6.4	(特殊)直交群が部分多様体であること	68
3.7	複素行列の群	68
3.7.1	ユニタリー群が部分多様体であること	69
3.8	演習	70
3.9	文献案内	72
第4章	動標構による曲面論	73
4.1	ユークリッド空間内の直交動標構	73
4.2	構造方程式	75
4.3	演習	76

4.4	曲面上の適合する直交動標構	77
4.4.1	径数づけられた曲面上の適合する直交動標構の存在	78
4.4.2	適合する直交動標構の構造方程式	78
4.4.3	例：球面上の適合する直交動標構	80
4.5	面積形式	80
4.5.1	面積形式の性質	81
4.5.2	球面の例、続き	81
4.5.3	面積分との関係	82
4.6	演習	82
4.7	曲面の曲率	84
4.7.1	不変性	85
4.7.2	定理	85
4.8	曲率の明示的計算	86
4.8.1	径数づけから曲率を順次計算する	87
4.8.2	例：球面	88
4.9	演習	88
4.10	基本形式	91
4.11	歴史および文献案内	93
第 5 章	微分可能多様体	95
5.1	微分可能多様体の定義	95
5.1.1	例：円周の座標近傍系	96
5.1.2	円周上の同値な座標近傍系	96
5.1.3	ユークリッド空間の部分多様体	97
5.2	トポロジーの基本語彙	97
5.2.1	微分可能多様体の開集合	98
5.2.2	微分可能多様体の閉集合とコンパクト集合	98
5.3	多様体から多様体への微分可能写像	99
5.3.1	C^r 写像の定義	99
5.3.2	例	99
5.4	演習	100
5.5	部分多様体	102
5.5.1	部分多様体の間の写像の性質	102
5.6	埋め込み	104
5.6.1	埋め込みと沈め込みによって得られる部分多様体	105
5.6.2	コンパクト性の補題	105
5.6.3	多様体の開集合と部分多様体の開集合の関係	105
5.6.4	部分多様体の包含写像 $*$ は埋め込みである	106

5.6.5	埋め込みの合成	106
5.6.6	部分多様体の部分集合が部分多様体になるとき	106
5.7	座標近傍を使わない部分多様体の構成	107
5.7.1	双曲面の部分多様体としての球面	107
5.7.2	特殊直交群の沈め込み	107
5.7.3	特殊直交群の埋め込み	108
5.8	境界のある部分多様体	108
5.8.1	境界は部分多様体であること。	109
5.8.2	沈め込みを使った特徴づけ	109
5.8.3	例	110
5.9	演習	111
5.10	補遺：部分多様体の開集合	112
5.10.1	多様体内の開集合と部分多様体の開集合の関係	112
5.11	補遺：1 の分割	113
5.11.1	1 の分割の存在の証明	114
5.11.2	例	114
5.12	歴史および文献案内	115
第 6 章	ベクトルバンドル	117
6.1	局所ベクトルバンドル	117
6.1.1	局所ベクトルバンドルの切断	118
6.1.2	簡単な例	118
6.2	局所ベクトルバンドルを使った構成	119
6.2.1	局所ベクトルバンドル射	119
6.2.2	局所ベクトルバンドル同型	120
6.2.3	ホモモルフィズムバンドル	120
6.2.4	局所ベクトルバンドルを使ったその他の構成	122
6.3	一般ベクトルバンドル	122
6.3.1	定義	122
6.3.2	変換関数	123
6.3.3	複素ベクトルバンドル	125
6.3.4	ベクトルバンドル射と同型	125
6.3.5	部分バンドル	126
6.3.6	自明なバンドルと自明でないバンドル	126
6.3.7	ベクトルバンドルの切断	127
6.4	変換関数によるベクトルバンドルの構成	127
6.4.1	ベクトルバンドルの構成定理	128
6.4.2	ベクトルバンドルの構成定理—別バージョン	128

xii	目次
6.4.3	ベクトルバンドルを使った構成 129
6.5	演習 129
6.6	多様体の接バンドル 131
6.6.1	接ベクトル—直観的な発想 131
6.6.2	接バンドルの形式的構成 132
6.6.3	接バンドルの座標近傍系の計算 133
6.6.4	余接バンドル 134
6.6.5	ベクトルバンドル射の例:接写像 134
6.7	演習 135
6.8	歴史および文献案内 137
6.9	補遺:ベクトルバンドルの構成 137
6.9.1	ベクトルバンドルの構成定理 137
第 7 章	標構場、形式、計量 141
7.1	ベクトルバンドルの標構場 141
7.1.1	ベクトル場と 1-形式の局所表現 141
7.1.2	接バンドルの標構場 142
7.1.3	余接バンドルの標構場 142
7.1.4	ベクトル場の関数への作用 143
7.1.5	微分演算子としてのベクトル場 143
7.2	曲線の同値類としての接ベクトル 144
7.2.1	曲線の同値類としての接ベクトル 144
7.3	多様体上の外積計算 145
7.3.1	外積計算の多様体上への導入 146
7.3.2	例 146
7.4	演習 147
7.5	不定計量 148
7.5.1	リーマン擬計量の局所表現 149
7.5.2	内積の集まりが不定計量を与えるための条件 149
7.6	リーマン多様体の例 149
7.6.1	ユークリッド計量 149
7.6.2	R^{n+k} の部分多様体に誘導された計量 150
7.6.3	双曲空間 151
7.7	直交標構場 152
7.7.1	直交標構場の存在 152
7.7.2	直交余標構場 153
7.7.3	標構場の直交標構場による表現 154
7.7.4	例:径数づけられた曲面上の直交余標構場 155

目次		xiii
7.8	接バンドルと余接バンドルの間の同型 155	
7.8.1	計量を使ったベクトル場と 1-形式の切り換え 155	
7.8.2	$\langle X , \omega^\sharp, \text{grad } f$ の公式 156	
7.9	演習 156	
7.10	歴史および文献案内 158	
第 8 章	向きづけられた多様体上の積分 159	
8.1	体積形式と向きづけ 159	
8.1.1	体積形式の同値の例 159	
8.1.2	向きづけ可能な多様体 160	
8.1.3	沈め込みの水準集合の向きづけ可能性 160	
8.1.4	行列の群の向きづけ可能性 162	
8.2	座標近傍系をつかった向きづけ可能性の基準 162	
8.2.1	座標近傍の変換写像の微分の行列式の正值性 162	
8.2.2	応用 163	
8.3	境界の向きづけ 164	
8.3.1	向きづけられた多様体で、境界は標準的な向きを持つ 164	
8.3.2	例 165	
8.4	演習 166	
8.5	n -形式の単一の座標近傍上での積分 168	
8.5.1	n -形式の単一の座標近傍上での積分は内在的 168	
8.5.2	仕事形式の線積分 169	
8.5.3	フラックス形式の面積分 170	
8.5.4	計算例 171	
8.6	n -形式の大域的積分 172	
8.6.1	n -形式の積分は内在的 173	
8.7	計量に関する標準の体積形式 174	
8.7.1	標準の体積形式は内在的である 175	
8.7.2	例 175	
8.7.3	擬リーマン多様体の体積 176	
8.8	ストークスの定理 176	
8.8.1	境界のあるコンパクト部分多様体のストークスの定理 177	
8.9	外微分の意味の開示 178	
8.9.1	外微分の幾何学的意味 179	
8.9.2	例: $n = 2$ 179	
8.10	演習 180	
8.11	歴史および文献案内 182	
8.12	補遺:ストークスの定理の証明 182	

8.12.1	ステップ 1	182
8.12.2	ステップ II : (8.41) の証明	183
8.12.3	ステップ III : (8.42) の証明	184
第 9 章	ベクトルバンドル上の接続	187
9.1	Koszul 接続	187
9.1.1	Koszul 接続の定義	187
9.1.2	例: 余接バンドルのユークリッド接続	188
9.1.3	例: 接バンドルのユークリッド接続	188
9.1.4	そのままの一般化は内在的でない	189
9.1.5	“接続” という用語の起源	189
9.2	ベクトルバンドル値の形式での接続の扱い	189
9.2.1	バンドル値を取る形式の例	190
9.2.2	外積	191
9.2.3	バンドル値形式の外微分としての接続	191
9.2.4	共変外微分の局所表現	193
9.3	接続の曲率	194
9.3.1	$\text{Hom}(E, E)$ -値 2-形式としての曲率	194
9.3.2	曲率テンソル	195
9.3.3	∇ 演算子で表された曲率	196
9.3.4	例	196
9.3.5	なぜ“曲率”と呼ばれるのか	197
9.3.6	接続行列で表したビアンキの恒等式	198
9.4	演習	198
9.5	ねじれない接続	203
9.5.1	TM 上の接続の振率	204
9.5.2	ねじれない接続の構成法	205
9.5.3	ねじれない接続の構成例	206
9.6	計量接続	207
9.6.1	計量接続の例	208
9.6.2	リーマン幾何の基本定理	208
9.6.3	レヴィ-チヴィタ接続の計算	210
9.6.4	断面曲率	210
9.7	演習	211
9.8	歴史および文献案内	213

第 10 章	ゲージ理論への応用	215
10.1	場の理論における接続の役割	215
10.2	ゲージ場の理論の幾何学的定式化	217
10.2.1	複素リー群を使った構成	217
10.2.2	G -バンドルと G -接続	218
10.2.3	G のファイバー上の作用、計量の保存	218
10.2.4	ゲージ群	219
10.2.5	いろいろなベクトルバンドル上の計量	219
10.2.6	曲率のノルム	220
10.2.7	ヤン-ミルズラグランジアン	221
10.2.8	例: ゲージ理論としてのマクスウェルの方程式	221
10.3	特殊ユニタリー群と 4 元数	223
10.3.1	4 元数と群 $\text{Sp}(1)$	223
10.3.2	$\text{Sp}(1)$ と $SU(2)$ の同一視	224
10.4	4 元数直線バンドル	224
10.4.1	例: 4-球面上の 4 元数直線バンドル	225
10.4.2	4 元数直線バンドル上の接続	226
10.4.3	H-値形式の外積計算のガイドライン	227
10.4.4	“場の強さ” としての曲率	227
10.4.5	4-球面上の 4 元数直線バンドル、続き	227
10.4.6	4 元数直線バンドル上のヤン-ミルズラグランジアン	229
10.5	演習	229
10.6	ヤン-ミルズ方程式	232
10.6.1	余微分	232
10.6.2	ヤン-ミルズ方程式の定式化	233
10.7	自己双対性	234
10.7.1	自己双対 2-形式	234
10.7.2	自己双対接続	235
10.7.3	自己双対接続はヤン-ミルズラグランジアンを極小にする	236
10.8	インスタントン	236
10.8.1	4 元数直線バンドル上の自己双対接続	237
10.8.2	定理	238
10.9	演習	238
10.10	歴史および文献案内	239
	訳者あとがき	245
	索引	309