

はじめに iii / 謝辞 v / 訳者まえがき vi

第1章 リーマン論文 1

1.1	論文の歴史的意味合い	1
1.2	オイラーの積公式	6
1.3	階乗関数	8
1.4	関数 $\zeta(s)$	9
1.5	$\zeta(s)$ の値	11
1.6	関数等式の第1証明	13
1.7	関数等式の第2証明	15
1.8	関数 $\zeta(s)$	17
1.9	ζ の根 ρ	19
1.10	$\zeta(s)$ の積表示	20
1.11	$\zeta(s)$ と素数の関係	22
1.12	フーリエ反転公式	24
1.13	$J(x)$ を導く方法の式	26
1.14	$J(x)$ の主項	27
1.15	根 ρ を含む項	30
1.16	残余項	32
1.17	$\pi(x)$ の公式	35
1.18	dJ の密度	37
1.19	リーマンの未解決問題	38

第2章 ζ の積公式 40

2.1	はじめに	40
2.2	イェンゼンの定理	41

2.3	$\zeta(s)$ の単純な評価	42
2.4	根 ρ の個数の評価	43
2.5	積の収束	44
2.6	商の増大率	45
2.7	偶関数である整関数の増大率	47
2.8	ζ の積公式	49

第3章 リーマンの主要公式 50

3.1	はじめに	50
3.2	$\psi(x)$ に関するフォン・マンゴルトの式の導出	52
3.3	基本となる積分公式	56
3.4	根の密度	58
3.5	$\psi(x)$ に関するフォン・マンゴルトの式の証明	60
3.6	リーマンの主要公式	64
3.7	リーマンの主要公式のフォン・マンゴルトによる証明	65
3.8	定数の数値計算	68

第4章 素数定理 71

4.1	はじめに	71
4.2	すべての ρ に対して $\operatorname{Re} \rho < 1$ となることのアダマールの証明	73
4.3	$\psi(x) \sim x$ の証明	76
4.4	素数定理の証明	80

第5章 ド・ラ・ヴァレ・プーサンの定理 82

5.1	はじめに	82
5.2	$\operatorname{Re} \rho < 1$ の改良	83
5.3	ド・ラ・ヴァレ・プーサンの誤差評価	85
5.4	$\pi(x)$ に関する別公式	89
5.5	誤差評価とリーマン予想	92
5.6	ド・ラ・ヴァレ・プーサンの証明への追記	96

第6章 オイラー・マクローリンの和公式による根の数値解析 102

6.1	はじめに.....	102
6.2	オイラー・マクローリンの和公式.....	104
6.3	オイラー・マクローリンの和公式, スターリング級数による Π の評価.....	113
6.4	ζ のオイラー・マクローリンの和公式による評価.....	121
6.5	直線上に乗った根の計算法.....	126
6.6	与えられた範囲内の根の個数を数える方法.....	134
6.7	$N(T)$ のバックルンドの評価.....	136
6.8	$\zeta(0)/\zeta(0)$ の別評価.....	142

第7章 リーマン・ジーゲルの公式 143

7.1	はじめに.....	143
7.2	基本公式の導出.....	144
7.3	鞍部点から離れた点での積分の評価.....	148
7.4	主要積分の第1近似.....	151
7.5	高次の近似.....	155
7.6	計算例.....	163
7.7	誤差評価.....	169
7.8	リーマン予想の発想の起源.....	171
7.9	リーマン・ジーゲルの公式.....	174

第8章 大規模計算 178

8.1	はじめに.....	178
8.2	チューリングの方法.....	179
8.3	レーマーの現象.....	182
8.4	ロッサー・ヨーエ・シェーンフェルドの計算.....	187

第9章 ゼータ関数の増大と零点の分布 190

9.1	はじめに.....	190
9.2	リンデレーフの評価と予想.....	191
9.3	三円定理.....	195
9.4	リンデレーフ予想のバックルンドによる定式化.....	196

9.5	$S(t)$ の平均値は 0.....	199
9.6	ボア・ランダウの定理.....	201
9.7	$ S(t) ^2$ の平均.....	203
9.8	その他の結果およびランダウの記号 o, O	208

第10章 フーリエ解析 213

10.1	\mathbb{R}^+ 上の不変作用素とその変換.....	213
10.2	随伴作用素およびその変換.....	215
10.3	変換 $\zeta(s)$ をもつ自己随伴作用素.....	216
10.4	関数等式.....	219
10.5	変換としての $2\zeta(s)/s(s-1)$	222
10.6	フーリエ反転公式.....	224
10.7	パーシヴァルの公式.....	225
10.8	$\zeta(-n)$ の値.....	226
10.9	メビウス反転公式.....	227
10.10	ラマヌジャンの式.....	229

第11章 $\text{Re } s = \frac{1}{2}$ 上の零点 236

11.1	ハーディの定理.....	236
11.2	直線上には KT 個以上の零点がある.....	240
11.3	直線上には $KT \log T$ 個以上の零点がある.....	249
11.4	補題の証明.....	258

第12章 さまざまな結果 273

12.1	リーマン予想と $M(x)$ の増大.....	273
12.2	リーマン予想とファレイ数列.....	276
12.3	ダンジョワによるリーマン予想の確率的解釈.....	281
12.4	興味深い誤りの予想.....	282
12.5	直線上の零点と変換.....	283
12.6	積分公式の別証明.....	287
12.7	タウバー型定理.....	292
12.8	チェビシェフの恒等式.....	295

12.9	セルバーグの不等式.....	298
12.10	素数定理の初等的証明.....	303
12.11	その他のゼータ関数, ヴェイユの定理.....	313

付録	与えられた数より小さな素数の個数について	314
----	----------------------	-----

参考文献	322	/	索引	329
------	-----	---	----	-----