

はじめに iii / 謝辞 v / 訳者まえがき vi

第1章 リーマン論文 1

| | | |
|------|-------------------|----|
| 1.1 | 論文の歴史的意味合い | 1 |
| 1.2 | オイラーの積公式 | 6 |
| 1.3 | 階乗関数 | 8 |
| 1.4 | 関数 $\zeta(s)$ | 9 |
| 1.5 | $\zeta(s)$ の値 | 11 |
| 1.6 | 関数等式の第1証明 | 13 |
| 1.7 | 関数等式の第2証明 | 15 |
| 1.8 | 関数 $\zeta(s)$ | 17 |
| 1.9 | ζ の根 ρ | 19 |
| 1.10 | $\zeta(s)$ の積表示 | 20 |
| 1.11 | $\zeta(s)$ と素数の関係 | 22 |
| 1.12 | フーリエ反転公式 | 24 |
| 1.13 | $J(x)$ を導く方法の式 | 26 |
| 1.14 | $J(x)$ の主項 | 27 |
| 1.15 | 根 ρ を含む項 | 30 |
| 1.16 | 残余項 | 32 |
| 1.17 | $\pi(x)$ の公式 | 35 |
| 1.18 | dJ の密度 | 37 |
| 1.19 | リーマンの未解決問題 | 38 |

第2章 ζ の積公式 40

| | | |
|-----|----------|----|
| 2.1 | はじめに | 40 |
| 2.2 | イェンゼンの定理 | 41 |

| | | |
|-----|-------------------|----|
| 2.3 | $\zeta(s)$ の単純な評価 | 42 |
| 2.4 | 根 ρ の個数の評価 | 43 |
| 2.5 | 積の収束 | 44 |
| 2.6 | 商の増大率 | 45 |
| 2.7 | 偶関数である整関数の増大率 | 47 |
| 2.8 | ζ の積公式 | 49 |

第3章 リーマンの主要公式 50

| | | |
|-----|------------------------------|----|
| 3.1 | はじめに | 50 |
| 3.2 | $\psi(x)$ に関するフォン・マンゴルトの式の導出 | 52 |
| 3.3 | 基本となる積分公式 | 56 |
| 3.4 | 根の密度 | 58 |
| 3.5 | $\psi(x)$ に関するフォン・マンゴルトの式の証明 | 60 |
| 3.6 | リーマンの主要公式 | 64 |
| 3.7 | リーマンの主要公式のフォン・マンゴルトによる証明 | 65 |
| 3.8 | 定数の数値計算 | 68 |

第4章 素数定理 71

| | | |
|-----|-------------------------------------------------------|----|
| 4.1 | はじめに | 71 |
| 4.2 | すべての ρ に対して $\text{Re } \rho < 1$ となることのアダマールの証明 | 73 |
| 4.3 | $\psi(x) \sim x$ の証明 | 76 |
| 4.4 | 素数定理の証明 | 80 |

第5章 ド・ラ・ヴァレ・プーサンの定理 82

| | | |
|-----|---------------------------|----|
| 5.1 | はじめに | 82 |
| 5.2 | $\text{Re } \rho < 1$ の改良 | 83 |
| 5.3 | ド・ラ・ヴァレ・プーサンの誤差評価 | 85 |
| 5.4 | $\pi(x)$ に関する別公式 | 89 |
| 5.5 | 誤差評価とリーマン予想 | 92 |
| 5.6 | ド・ラ・ヴァレ・プーサンの証明への追記 | 96 |

第 6 章 オイラー - マクローリンの和公式による根の数値解析 102

| | | |
|-----|-----------------------------------------------|-----|
| 6.1 | はじめに..... | 102 |
| 6.2 | オイラー - マクローリンの和公式..... | 104 |
| 6.3 | オイラー - マクローリンの和公式, スターリング級数による Π の評価..... | 113 |
| 6.4 | ζ のオイラー - マクローリンの和公式による評価..... | 121 |
| 6.5 | 直線上に乗った根の計算法..... | 126 |
| 6.6 | 与えられた範囲内の根の個数を数える方法..... | 134 |
| 6.7 | $N(T)$ のバックルンドの評価..... | 136 |
| 6.8 | $\zeta(0)/\zeta(0)$ の別評価..... | 142 |

第 7 章 リーマン - ジーゲルの公式 143

| | | |
|-----|-----------------------|-----|
| 7.1 | はじめに..... | 143 |
| 7.2 | 基本公式の導出..... | 144 |
| 7.3 | 鞍部点から離れた点での積分の評価..... | 148 |
| 7.4 | 主要積分の第 1 近似..... | 151 |
| 7.5 | 高次の近似..... | 155 |
| 7.6 | 計算例..... | 163 |
| 7.7 | 誤差評価..... | 169 |
| 7.8 | リーマン予想の発想の起源..... | 171 |
| 7.9 | リーマン - ジーゲルの公式..... | 174 |

第 8 章 大規模計算 178

| | | |
|-----|-------------------------------|-----|
| 8.1 | はじめに..... | 178 |
| 8.2 | チューリングの方法..... | 179 |
| 8.3 | レーマーの現象..... | 182 |
| 8.4 | ロッサー - ヨーエ - シェーンフェルドの計算..... | 187 |

第 9 章 ゼータ関数の増大と零点の分布 190

| | | |
|-----|----------------------------|-----|
| 9.1 | はじめに..... | 190 |
| 9.2 | リンデレーフの評価と予想..... | 191 |
| 9.3 | 三円定理..... | 195 |
| 9.4 | リンデレーフ予想のバックルンドによる定式化..... | 196 |

| | | |
|-----|-------------------------------|-----|
| 9.5 | $S(t)$ の平均値は 0..... | 199 |
| 9.6 | ボア - ランダウの定理..... | 201 |
| 9.7 | $ S(t) ^2$ の平均..... | 203 |
| 9.8 | その他の結果およびランダウの記号 o, O | 208 |

第 10 章 フーリエ解析 213

| | | |
|-------|----------------------------------|-----|
| 10.1 | \mathbb{R}^+ 上の不変作用素とその変換..... | 213 |
| 10.2 | 随伴作用素およびその変換..... | 215 |
| 10.3 | 変換 $\zeta(s)$ をもつ自己随伴作用素..... | 216 |
| 10.4 | 関数等式..... | 219 |
| 10.5 | 変換としての $2\zeta(s)/s(s-1)$ | 222 |
| 10.6 | フーリエ反転公式..... | 224 |
| 10.7 | パーシヴァルの公式..... | 225 |
| 10.8 | $\zeta(-n)$ の値..... | 226 |
| 10.9 | メビウス反転公式..... | 227 |
| 10.10 | ラマヌジャンの式..... | 229 |

第 11 章 $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ 上の零点 236

| | | |
|------|----------------------------------|-----|
| 11.1 | ハーディの定理..... | 236 |
| 11.2 | 直線上には KT 個以上の零点がある..... | 240 |
| 11.3 | 直線上には $KT \log T$ 個以上の零点がある..... | 249 |
| 11.4 | 補題の証明..... | 258 |

第 12 章 さまざまな結果 273

| | | |
|------|---------------------------|-----|
| 12.1 | リーマン予想と $M(x)$ の増大..... | 273 |
| 12.2 | リーマン予想とファレイ数列..... | 276 |
| 12.3 | ダンジョワによるリーマン予想の確率的解釈..... | 281 |
| 12.4 | 興味深い誤りの予想..... | 282 |
| 12.5 | 直線上の零点と変換..... | 283 |
| 12.6 | 積分公式の別証明..... | 287 |
| 12.7 | タウバー型定理..... | 292 |
| 12.8 | チェビシェフの恒等式..... | 295 |

| | | |
|-------|-------------------------|-----|
| 12.9 | セルバーゲの不等式..... | 298 |
| 12.10 | 素数定理の初等的証明..... | 303 |
| 12.11 | その他のゼータ関数, ヴェイユの定理..... | 313 |

| | | |
|----|----------------------|-----|
| 付録 | 与えられた数より小さな素数の個数について | 314 |
|----|----------------------|-----|

| | | | | |
|------|-----|---|----|-----|
| 参考文献 | 322 | / | 索引 | 329 |
|------|-----|---|----|-----|