目　次

第I部　基本群と特異点

第1章　基 本 群

1.1　連続写像のホモトピー 3
1.2　基本群 6
1.3　基本群のホモトピー不変性 10
1.4　閉部分多様体の補集合の基本群 12
　1.4.1　C^∞ 級写像の横断性 12
　1.4.2　閉部分多様体の補集合の基本群 15
1.5　自由ループ 23
1.6　解析的部分集合の補集合の基本群 24
　1.6.1　解析的部分集合 25
　1.6.2　解析的部分集合の補集合の基本群 26
　1.6.3　超曲面のまわりの単純自由ループ 28
　1.6.4　超曲面の補集合の基本群 33

第2章　ファイバー空間

2.1　局所自明なファイバー空間 37
2.2　セール のファイバー空間 40

2.3 被覆空間 43
2.3.1 離散ファイバーを持つ局所自明なファイバー空間のモノドロミー 43
2.3.2 集合への群の作用 45
2.3.3 被覆空間と普遍被覆空間 47
2.3.4 普遍被覆空間の存在 53
2.4 切断を持つセールのファイバー空間の基本群 56
2.5 正則写像と基本群 62

第3章 ファン・カンペンの定理

3.1 局所系 67
3.2 群の融合 76
3.3 ファン・カンペンの定理 79
3.4 穴あき平面の基本群 81

第4章 ザリスキ–ファン・カンペンの方法

4.1 射影平面曲線の場合 83
4.2 アフィン平面曲線の場合 85
4.3 射影平面曲線とアフィン平面曲線 87

第5章 いくつかの具体例

5.1 基本的なモノドロミー関係式 89
5.1.1 $C : y^n - x = 0$ $(n \geq 1)$ のとき 90
5.1.2 $C : y^2 - x^2 = 0$ のとき 92
5.1.3 $C : y^2 - x^3 = 0$ のとき 94
5.2 非特異平面曲線の補空間の基本群 95
5.3 平面2次曲線および平面3次曲線の補空間の基本群 99
5.3.1 平面2次曲線 99
5.3.2 平面3次曲線 99
5.4 $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{C})$ が非可換になる既約な曲線の例 101

第6章 平面曲線の特異点の形状と基本群

6.1 $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B)$ の可換性に関する諸結果 117
6.2 $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B)$ の非可換性に関する結果 120
6.3 ザリスキ・ペア 123
6.3.1 ザリスキ・ペアとは？ 123
6.3.2 ザリスキ・ペア研究の手法 125
6.3.3 基本群の計算によるザリスキ・ペアの研究 126
6.3.4 ガロア分岐被覆を用いたザリスキ・ペアの研究 127
6.3.5 既約な6次曲線のザリスキ・ペアの例 129

第7章 ガロア分岐被覆

7.1 ガロア分岐被覆 131
7.2 代数曲面の2次被覆 133
7.2.1 2次被覆の構成 133
7.2.2 $\mathbb{P}^2$ の2次被覆 134
7.3 2次被覆とその特異点解消 136
7.4 二面体被覆 142
7.5 代数曲面の D_{2p} 被覆 144
7.6 定理6.10の証明：その方針 146
7.7 (I) の証明 147
7.8 $NS(Z)/T$ の p-torsion 148
7.9 $f'^{-1}(x)$ が A_n 型, E_6 型のときの $G_{T_{1,x}}$ の構造 149
7.10 (II) の証明 150

第I部 参考文献 153

第 II 部　実代数幾何学と特異点

— ヒルベルト第 16 問題とその周辺 —

第 1 章　ヒルベルト第 16 問題

1.1　実平面代数曲線 159
1.2　実非特異曲線の位相的分類 162
1.3　ヒルベルト第 16 問題 164
1.4　ハルナックの結果 165
1.5　ハルナック不等式の第 1 の証明* 167
1.6　低次の実平面曲線 169
1.7　6 次曲線の位相的分類 171
1.8　7 次曲線の位相的分類 173
1.9　実平面代数曲線のトポロジー 174
1.10 ペトロフスキー不等式・ラグスデール予想・アーノルド不等式 175
1.11 いろいろな合同式 178
1.12 M-曲線の構成 180
1.13 ヒルベルトの方法 185
1.14 グドゥコフの方法 187

第 2 章　不等式

2.1　実射影超曲面とペトロフスキー–オレイニク不等式 191
2.2　アイゼンバッド–レビン公式 194
2.3　ペトロフスキー–オレイニク不等式の証明 195
2.4　局所レベル多様体のオイラー標数 198
2.5　実ケーラー多様体に関するハルラモフ不等式 200
2.6　実ケーラー多様体に関するハルラモフ不等式の証明* 202
2.7　分岐被覆とその応用 203
2.8　アーノルド不等式の証明のアイデア 205
2.9　奇数次の曲線 207
2.10 特異点の微小摂動で現れる曲線の位相的制約 208
2.11 評価の最良性の問題 211

第 3 章　合同式

3.1　ロホリンの仕事と M-多様体 215
3.2　16 を法とするロホリンの合同式 217
3.3　ブラウン不変量 220
3.4　ブラウン不変量（続き）* 222
3.5　ロホリン形式とギルー–マランの定理 225
3.6　マランによる合同式の証明 227

第 4 章　ヴィロのパッチワーク

4.1　3 角形パッチワーク 231
4.2　パッチワーク 235
4.3　特異点の微小摂動と曲線の構成 238
4.4　6 次曲線の構成 245
4.5　アイテンバーグの定理 246

第 5 章　ニクリンの理論の応用

5.1　実射影多様体と対称双 1 次形式 253
5.2　$\mathbf{Z}$ 上対称双 1 次形式 254
5.3　偏極対合付き格子と実射影 $K3$ 曲面 256
5.3.1　偏極対合付き格子 257
5.3.2　偏極対合付き格子の種の不変量の位相的解釈 261
5.3.3　$K3$ 曲面 262
5.3.4　実射影 $K3$ 曲面の分類 264
5.3.5　実 4 次曲面の剛アイソトピー分類 268
5.4　条件付き対合付き格子 269

5.5 $\mathbf{R}P^1 \times \mathbf{R}P^1$ 上の実代数曲線の分類への応用 275

第6章 その他のトピックスと未解決問題

6.1 曲線の複素向きづけ 285
6.2 分離型，非分離型について 287
6.3 剛アイソトピーと同変アイソトピー 289
6.4 $\mathbf{R}P^3$ の中の双曲面上の実代数曲線 291
6.5 実トーリック曲面上の実代数曲線 292
6.6 総実部分多様体とラグランジュ部分多様体 296
6.7 未解決問題集 297

第7章 補 足

7.1 射影空間 307
7.2 位相幾何から 309
7.2.1 ホモロジーとコホモロジー 309
7.2.2 向き 311
7.2.3 交点数 313
7.2.4 不動点公式 315
7.2.5 対合の指数のアティヤ–シンガーによる幾何的解釈 . . 316
7.2.6 スミスの完全系列 318
7.2.7 ハルナック不等式の第2の証明 321
7.3 アイソトピー 321
7.4 複素曲面の複素共役による商空間の微分構造 324
7.4.1 商空間の微分構造 324
7.4.2 倍被覆 325
7.4.3 2重被覆 327
7.4.4 複素射影平面の複素共役による商空間 328
7.5 代数幾何と解析幾何から 329
7.5.1 交点数 329
7.5.2 2次変換 331
7.5.3 ベズーの定理 331
7.5.4 ハルナック不等式の第3の証明 332
7.6 アイゼンバッド–レビン公式 333
7.6.1 ホバンスキーの補題と写像度 333
7.6.2 留数 335
7.6.3 写像度と留数 336
7.6.4 アイゼンバッド–レビン公式の証明 337

第II部 参考文献 341

索 引 357