

# 目次

|                              |    |
|------------------------------|----|
| 第0部 共通して必要な予備知識のまとめ          |    |
| 第1章 代数学の予備知識のまとめ             |    |
| 1.1 群 . . . . .              | 3  |
| 1.2 環, 体 . . . . .           | 8  |
| 1.3 加群, 多元環 . . . . .        | 13 |
| 1.4 中山の補題 . . . . .          | 15 |
| 第2章 多様体                      |    |
| 2.1 逆関数の定理, 陰関数の定理 . . . . . | 19 |
| 2.2 多様体 . . . . .            | 24 |
| 2.3 接ベクトルと接空間 . . . . .      | 28 |
| 2.4 リー変換群 . . . . .          | 30 |
| 2.5 リー変換群の軌道の接空間 . . . . .   | 35 |
| 2.6 ベクトル場と積分曲線 . . . . .     | 38 |
| 第0部の参考書                      | 42 |
| 参考文献                         | 43 |

## 第 I 部 特異点とマザー理論

|  |     |
|--|-----|
| 第 0 章 マザー理論 前夜                                     | 47  |
| 第 1 章 マザー理論 序幕： $\mathcal{A}$ と $\mathcal{K}$      |     |
| 1.1 集合芽と写像芽  | 50  |
| 1.2 $\mathcal{A}$ -同値と $\mathcal{K}$ -同値           | 51  |
| 1.3 $\mathcal{A}$ -軌道, $\mathcal{K}$ -軌道およびそれらの接空間 | 59  |
| 1.4 補足：階数定理  | 63  |
| 第 2 章 マザー理論 第 2 幕：安定写像芽                            |     |
| 2.1 安定写像芽  | 69  |
| 2.2 無限小安定写像芽                                       | 72  |
| 2.3 安定写像芽の特徴付け                                     | 74  |
| 第 3 章 マザー理論 第 3 幕：有限確定性                            |     |
| 3.1 有限ジェット   | 87  |
| 3.2 有限確定性とその背景                                     | 90  |
| 3.3 有限確定性の代数的特徴付け                                  | 91  |
| 3.4 トムのシナリオとその欠陥                                   | 102 |
| 3.5 補足：無限ジェット                                      | 104 |
| 第 4 章 マザー理論 第 4 幕：マザーの分類定理とその応用                    |     |
| 4.1 $\mathcal{K}$ -同値の代数的特徴付け                      | 109 |
| 4.2 マザーの分類定理                                       | 111 |
| 4.3 マザー化と遺伝子型                                      | 113 |

## 第 5 章 マザー理論 第 5 幕：マザーの補題とその応用

|                 |     |
|-----------------|-----|
| 5.1 マザーの補題      | 125 |
| 5.2 安定写像芽の確定オーダ | 128 |
| 5.3 ギャフニーの定理    | 130 |

## 第 6 章 マザー理論 第 6 幕：横断性と安定写像

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 6.1 横断性                      | 133 |
| 6.2 ジェットバンドル, 可微分写像空間と安定写像空間 | 135 |
| 6.3 トムの横断性定理                 | 140 |
| 6.4 マザーの多重横断性定理              | 144 |
| 6.5 安定写像の特徴付け                | 146 |

## 第 7 章 マザー理論 第 7 幕： $\mathcal{K}$ -モジュラジェット集合と不安定ジェット集合

|   |     |
|---|-----|
| 7.1 $\mathcal{K}$ -モジュラジェット集合 $\pi^r(n, p)$ | 157 |
| 7.2 安定写像空間の稠密性の判定法                          | 159 |
| 7.3 不安定ジェット集合 $\Sigma(n, p)$                | 161 |
| 7.4 定理 7.3.1 の証明                            | 163 |
| 7.5 定理 7.4.1 (2), (2') の証明                  | 166 |

## 第 8 章 マザー理論 フィナーレ：構造安定性問題の解決の概説

|  |     |
|--|-----|
| 8.1 マザーの構造安定性定理                                    | 169 |
| 8.2 $\sigma_k^2(n, p)$ の計算                         | 172 |
| 8.3 $n \leq p$ かつ $k \geq 4$ の場合の $\sigma_k(n, p)$ | 174 |
| 8.4 $n \leq p$ の場合の $\sigma_2(n, p)$               | 175 |
| 8.5 $n \leq p$ の場合の $\sigma_3(n, p)$               | 177 |
| 8.6 $n > p$ の場合                                    | 178 |

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 8.7 安定写像芽の分類 . . . . . | 182 |
|------------------------|-----|

## 第9章 ポスト マザー理論 序幕：マルティネ理論

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 9.1 普遍開折 . . . . .     | 190 |
| 9.2 無限小普遍開折 . . . . .  | 191 |
| 9.3 普遍開折の存在 . . . . .  | 192 |
| 9.4 普遍開折の一意性 . . . . . | 199 |
| 9.5 普遍開折の応用 . . . . .  | 207 |

## 第10章 垣間見るポスト マザー理論 数幕

|  |     |
|--|-----|
| 10.1 有限確定性の幾何的特徴付け . . . . .             | 213 |
| 10.2 $\mathcal{A}$ -同値に関する認識問題 . . . . . | 215 |
| 10.3 ポスト マザー理論 第 $X$ 幕 . . . . .         | 225 |

|                |     |
|----------------|-----|
| 参考文献 . . . . . | 229 |
|----------------|-----|

## 第II部 分岐理論と特異点

### 第1章 問題の設定

|   |     |
|---|-----|
| 1.1 分岐問題と陰関数の定理 . . . . .                 | 237 |
| 1.2 分岐問題の分類 . . . . .                     | 240 |
| 1.2.1 $C^0$ -同値 . . . . .                 | 241 |
| 1.2.2 分岐問題の摂動と分岐問題の普遍開折, 普遍開折同値 . . . . . | 244 |

### 第2章 ゴルビツキー-シェーファアの理論 I：基本定理

|   |     |
|---|-----|
| 2.1 普遍開折同値と分岐問題の $\mathcal{K}$ -同値 . . . . .  | 251 |
| 2.2 分岐問題の $\mathcal{K}_B$ -軌道とその接空間 . . . . . | 255 |

|  |     |
|--|-----|
| 2.2.1 復習 関数環 $\mathcal{E}_{n+r}$ と $\mathcal{E}_{n+r}$ -加群 $\mathcal{E}_{n+r}^n$ . . . . . | 255 |
|--|-----|

|  |     |
|--|-----|
| 2.2.2 写像芽 $f : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r, (0, 0)) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ の $\mathcal{K}_B$ -軌道とその接空間 . . . . . | 256 |
|--|-----|

|  |     |
|--|-----|
| 2.3 接空間 $T\mathcal{K}_B(f)$ の代数的公式 . . . . . | 260 |
|--|-----|

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 2.4 ゴルビツキー-シェーファア理論の基本定理 . . . . . | 264 |
|------------------------------------|-----|

### 第3章 ゴルビツキー-シェーファアの理論 II：分岐問題の普遍開折の存在と唯一性の証明

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 3.1 開折のパラメータの個数の縮小 . . . . . | 271 |
|------------------------------|-----|

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 3.2 マルグランジュの予備定理 . . . . . | 277 |
|----------------------------|-----|

|  |     |
|--|-----|
| 3.3 普遍開折の存在定理 (定理 2.4.1 (2)) の証明 . . . . . | 280 |
|--|-----|

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 3.4 普遍開折の唯一性の証明 . . . . . | 284 |
|---------------------------|-----|

### 第4章 ゴルビツキー-シェーファアの理論 III： $\mathcal{K}_B$ -同値に関する有限確定性

|  |     |
|--|-----|
| 4.1 $\mathcal{K}_B$ -有限確定性に関するゴルビツキー-シェーファアの評価式と泉屋の評価式 . . . . . | 287 |
|--|-----|

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 4.2 簡単な例 . . . . . | 290 |
|--------------------|-----|

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 4.3 分岐問題の有限確定性に関する泉屋の定理の証明 . . . . . | 291 |
|--------------------------------------|-----|

|   |     |
|---|-----|
| 4.4 有限確定性に関するゴルビツキー-シェーファアの定理の証明：ある命題への還元 . . . . . | 296 |
|---|-----|

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 4.5 ゴルビツキー-シェーファアの命題の証明 . . . . . | 297 |
|-----------------------------------|-----|

### 第5章 ゴルビツキー-シェーファアの理論 IV：分岐問題の分類

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 5.1 分岐問題の自由度と余次元 . . . . . | 303 |
|----------------------------|-----|

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 5.2 自由度 1 の分岐問題の分類 . . . . . | 311 |
|------------------------------|-----|

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 5.2.1 自由度 1 の分岐問題の分類：その 1 . . . . . | 313 |
|-------------------------------------|-----|

|       |                               |     |
|-------|-------------------------------|-----|
| 5.2.2 | 自由度 1 の分岐問題の分類：その 2 . . . . . | 316 |
| 5.3   | 自由度 2 の分岐問題の分類 . . . . .      | 321 |

## 第 6 章 ゴルビツキー-シェーファーの理論 V：普遍開折の解析

|     |                               |     |
|-----|-------------------------------|-----|
| 6.1 | 分岐問題の遷移集合 . . . . .           | 333 |
| 6.2 | 余次元が 3 以下の分岐問題の遷移集合 . . . . . | 336 |
| 6.3 | 遷移集合と摂動分岐問題の図 . . . . .       | 343 |

## 第 7 章 写像度と 2 次形式の固有値

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 7.1 | 写像度に関する基本定理と写像芽の写像度 . . . . .                                | 351 |
| 7.2 | $\mathcal{K}$ -同値に関する有限確定性と孤立零点性とマザーの局所環<br>$Q(f)$ . . . . . | 360 |
| 7.3 | 写像度と 2 次形式の固有値：アイゼンバッド-レビンの公式 . . . . .                      | 364 |
| 7.4 | 実代数的集合のオイラー標数と写像度：シャフラニエツの定理 . . . . .                       | 372 |

## 第 8 章 分岐問題の位相的分類と写像度

|     |                                   |     |
|-----|-----------------------------------|-----|
| 8.1 | 分岐問題の位相的分類と写像度 . . . . .          | 377 |
| 8.2 | 分岐問題の位相的分類と写像度に関する定理の証明 . . . . . | 382 |
| 8.3 | 分岐問題に付随する写像芽の有限確定性 . . . . .      | 388 |

|         |            |     |
|---------|------------|-----|
| 出典と参考文献 | さらなる勉強のために | 393 |
|---------|------------|-----|

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 参考文献 |  | 395 |
|------|--|-----|

|    |  |     |
|----|--|-----|
| 索引 |  | 399 |
|----|--|-----|