

## オペレーションズ・リサーチ入門・目次

### 第1章 オペレーションズ・リサーチとはなにか

1.1	オペレーションズ・リサーチとはなにか	1
1.1.1	オペレーションズ・リサーチの生いたち	1
1.1.2	オペレーションズ・リサーチの対象と問題	5
1.2	オペレーションズ・リサーチにおける問題の追求	8
1.2.1	最適性の追求	8
1.2.2	解をもとめる手順	10
	(a) 問題を定式化すること	10
	(b) 模型をつくって、解をもとめること	12
	(1) 通信模型をつくること (2) 数学模型をつくること	
	(3) 解をもとめること (4) しばしばあらわれる O.R. 模型	
	(c) 模型と解を試験すること	21
	(1) 模型の試験 (2) 解の試験	
	(d) 解を管理し実施すること	23
	(e) O.R. チーム	24
1.3	有効さ函数	25
1.3.1	効率と効用のもめかた	26
	(a) 効率のもめかた	26
	(b) 効用のもめかた	27
1.3.2	有効さ函数のつくりかた	27
	参考文献	29

### 第2章 線型計画法

2.1	線型計画法と単体法	31
2.1.1	線型計画法とはなにか	31
2.1.2	単体法と単体表	38

(a) ベクトルの導入 . . . . . 42

(b) 単体表のつくりかた . . . . . 43

(c) 単体表のよみかた . . . . . 51

(d) 単体計算の手順 . . . . . 54

2.1.3 単体表の性質と検算 . . . . . 59

2.1.4 単体表の経済的考察 . . . . . 62

2.2 単体法における諸問題 . . . . . 66

2.2.1 制約条件の分類 . . . . . 66

(a) 標準むきの不等式制約条件のもとでの最大最小問題 . . . . . 66

(b) 等式制約条件のもとでの最大最小問題 . . . . . 67

(c) 逆むきの不等式制約条件のもとでの最大最小問題 . . . . . 76

(d) 等式不等式混在制約条件のもとでの最大最小問題 . . . . . 81

2.2.2 単体法の退化 . . . . . 86

2.2.3 解の無限大または不能 . . . . . 96

2.2.4 線型計画問題の修正 . . . . . 98

(a) 単位利潤  $c_j$  の変動 . . . . . 99

(b) あたらしい活動  $P_j$  の追加と削除 . . . . . 102

(c) 制約条件量  $b_i$  の変化 . . . . . 103

(d) あたらしい制約条件の追加 . . . . . 105

2.2.5 単体法の双対性 . . . . . 109

(a) 価格評価と評価値 . . . . . 109

(b) 単体表の双対問題 . . . . . 111

(c) 双対問題の定式化 . . . . . 117

2.3 線型計画法の数学的理論 . . . . . 119

2.3.1  $n$ 次元ベクトル空間 . . . . . 119

2.3.2 ベクトルの1次変換 . . . . . 123

2.3.3 凸多面体と線型計画法 . . . . . 125

2.3.4 線型計画法の数学的理論 . . . . . 134

2.3.5 単体法の双対性 . . . . . 142

2.4 線型計画法の応用とその他の諸問題 . . . . . 147

2.4.1 代表的な応用模型 . . . . . 147

(a) 単体模型 . . . . . 147

(1) 混合問題 (2) 生産計画問題

(3) 栄養問題 (4) 工作問題

(b) 輸送模型 . . . . . 151

(1) 輸送問題 (2) 作業計画問題

(3) 在庫生産計画問題 (4) 購入計画問題

(c) 割当模型 . . . . . 159

2.4.2 その他の諸問題とその応用 . . . . . 161

(a) 動的線型計画問題 . . . . . 161

(1) 動的生産計画問題 (2) 調達問題

(b) 特殊輸送問題 . . . . . 165

(1) 一般化された輸送問題 (2) 容量制限輸送問題

(3) 積替問題 (4) 多次元輸送問題 (5) 多段輸送問題

(c) 割当問題 . . . . . 167

(d) パラメトリック計画問題 . . . . . 168

2.4.3 最適解をめぐる諸問題 . . . . . 168

(a) 計算速度向上の問題 . . . . . 168

(b) 整数解の問題 . . . . . 169

2.4.4 非線型計画法 . . . . . 170

(a) 確率線型計画法 . . . . . 170

(b) 凸計画法 . . . . . 171

(c) 2次計画法 . . . . . 172

2.4.5 応用分野の展望 . . . . . 173

(a) 生産面への応用 . . . . . 173

(b) 経済面への応用 . . . . . 174

(c) 学術面への応用 . . . . . 175

(d) 軍事面への応用 . . . . . 176

演習問題 . . . . . 176

参考文献 . . . . . 180

第3章 ゲームの理論と統計的決定理論

3.1 ゲーム模型 . . . . . 185

3.1.1 ゲームの理論とはなにか . . . . . 185

3.1.2 効用理論 . . . . . 187

3.1.3 ゲーム模型 . . . . . 194

(a) 拡大型のゲーム . . . . . 194  
 (b) 標準型のゲームと純粹方略 . . . . . 197

3.2 マトリクス・ゲーム . . . . . 198

3.2.1 ミニマックスの原理 . . . . . 198

3.2.2 マトリクス・ゲームの理論 . . . . . 201

(a) 混合方略 . . . . . 201

(b) ミニマックス定理 . . . . . 203

(c)  $2 \times n$  のマトリクス・ゲームの幾何学的考察 . . . . . 209

3.2.3 最適方略の性質 . . . . . 212

(a) 一般的性質 . . . . . 212

(b) 優越性の原理 . . . . . 213

(c) 端点最適方略(マトリクス・ゲームの代数的解法) . . . . . 217

3.2.4 特殊な型のマトリクス・ゲーム . . . . . 222

(a) 完全混合ゲーム . . . . . 222

(b) 対称ゲーム . . . . . 223

3.2.5 マトリクス・ゲームの近似解法 . . . . . 225

(a) 図式解法 . . . . . 225

(b) 反復法 . . . . . 228

3.2.6 マトリクス・ゲームと線型計画問題 . . . . . 231

(a) マトリクス・ゲームの線型計画問題への還元 . . . . . 231

(b) 線型計画問題のマトリクス・ゲームへの還元 . . . . . 233

3.3 一般的なゲーム . . . . . 237

3.3.1 無限方略ゲーム . . . . . 238

(a) 方略集合の1つが有限であるゲーム . . . . . 239

(b) 単位正方形ゲーム . . . . . 240

3.3.2 非零和2人ゲーム . . . . . 241

3.3.3  $n$ 人ゲーム . . . . . 245

(a)  $n$ 人ゲームの特質 . . . . . 245

(b) 特性関数 . . . . . 246

(c)  $S$ -等価の関係と簡約型のゲームへの還元 . . . . . 247

(d) Neumann-Morgenstern の解 . . . . . 249

(e) 非零和 $n$ 人ゲームについての注意 . . . . . 251

3.4 統計的決定理論 . . . . . 255

3.4.1 統計的決定理論とはなにか . . . . . 253

(a) 統計ゲーム . . . . . 253

(1) 標本空間 (2) 決定関数 (3) 危険関数 (4) 混合方略

(b) 統計ゲームにおける方略の分類 . . . . . 257

(1) 許容類 (2) 完全類 (3) ベーズ方略 (4) 一意な方略

(c) 統計量の充足性 . . . . . 260

3.4.2 ベーズ方略の構成 . . . . . 262

(a) パラメータ空間も、行動空間も有限であるばあい . . . . . 262

(b) パラメータ空間のみが有限であるばあい . . . . . 263

(1) ベーズ方略と尤度比 (2) 点推定

(c) 行動空間のみが有限であるばあい . . . . . 269

(1) ミニマックス検定 (2) 片側仮説の検定

3.4.3 逐次ゲーム . . . . . 275

(a) 逐次ゲームの定式化 . . . . . 275

(b) 逐次ゲームのベーズ方略 . . . . . 278

(c) 費用は一定、確率変数はおなじ分布にしたがい、かつ、たがいに独立である逐次ゲーム . . . . . 282

(d) Wald のミニマックス逐次決定規則 . . . . . 285

演習問題 . . . . . 289

参考文献 . . . . . 292

第4章 待ち合わせ行列の理論

4.1 待ち合わせ行列の理論における基本方程式 . . . . . 293

4.1.1 待ち合わせ行列の理論とはなにか . . . . . 293

4.1.2 数学的考察に必要とされる条件 . . . . . 294

4.1.3 基本方程式の誘導 . . . . . 295

4.1.4 定常状態の存在 . . . . . 297

4.1.5 差分方程式とその解 . . . . . 299

4.2 もっとも基本的な待ち合わせ行列の問題 . . . . . 300

4.2.1 客の到着と応対時間の分布 . . . . . 300

4.2.2 窓口が1個のばあい . . . . . 309

(a) 系にいる客の数の分布とその平均値	309
(b) 客が系にいる時間の分布とその平均値	310
4.2.3 窓口が無限個あるばあい	313
4.2.4 窓口が $s$ 個のばあい	318
(a) 系にいる客の数の分布とその平均値	318
(b) 客が系にいる時間の分布とその平均値	320
4.2.5 多段の窓口のばあい	325
(a) 系にいる客の数の分布	325
(b) 客が系にいる時間の分布	331
4.3 待ち合わせ行列の理論における諸問題(その I)	337
4.3.1 客の母集団が有限であるばあい	337
(a) 修理工が 1 人のばあい(窓口が 1 個のばあい)	338
(b) 修理工が $s(\geq 1)$ 人のばあい(窓口が $s$ 個のばあい)	341
(c) 修理工が $m$ 人のばあい(窓口が $m$ 個のばあい)	346
4.3.2 優先権のある客とない客とを区別するばあい(窓口 1 個)	346
(a) 微分方程式の誘導	347
(b) 母函数による解法	350
(c) 定常解	354
(d) $\mu_1 = \mu_2$ のばあいの解および系にいる客の数の平均値	356
4.3.3 客の立ち去りをゆるしたばあい	361
(a) (i) の ①: 到着順の応対, $\tau_0$ 時間待っても応対がはじまらなければかえるばあい(窓口 $s$ 個)	361
(1) 微分方程式とその定常解 (2) $q_n$ の決定	
(3) 応対をあきらめてかえってしまう客の割合	
(b) (i) の ②: 任意抽出の応対, $\tau_0$ 時間待っても応対がはじまらなければかえるばあい(窓口 $s$ 個)	368
(1) $q_n$ の決定 (2) 応対をあきらめてかえってしまう客の割合	
(c) (ii) の ①: 到着順の応対, $\tau_0$ 時間以内に応対がおわらなければかえるばあい(窓口 1 個)	371
(1) 微分方程式とその定常解 (2) $q_n$ の決定	
(3) 応対をあきらめてかえってしまう客の割合	
(d) (ii) の ②: 任意抽出の応対, $\tau_0$ 時間以内に応対がおわらなければかえるばあい(窓口 $s$ 個)	376
(1) $q_n$ の決定 (2) 応対をあきらめてかえってしまう客の割合	

4.3.4 客がかならずしも行列にくわわるとはかぎらないばあい(窓口 1 個)	380
(a) 微分方程式とその定常解	381
(b) $\rho$ の決定	382
(c) 客が系にいる時間の分布とその平均値	386
4.3.5 平均到着率, 平均応対率が時間の函数であるばあい	387
(a) 窓口が 1 個のばあい	388
(1) 微分方程式の誘導 (2) 微分方程式の解法	
(3) 行列級数の収束条件	
(4) 系にいる客の数および客が系にいる時間の平均値	
(5) $\rho(t) = \rho_1 t$ のばあい (6) $\mu(t)$ が時間の函数であるばあい	
(b) 窓口が無限個あるばあい	404
4.4 待ち合わせ行列の理論における諸問題(その II)	406
4.4.1 応対時間が一定 ( $1/\mu$ ) であるばあい(窓口 1 個)	406
(a) 客が系にいる時間の分布	407
(b) 系にいる客の数の分布	411
4.4.2 応対時間が任意の分布にしたがうばあい(窓口 1 個)	412
(a) 確率変数とその母函数	412
(b) $P_j(x)$ の決定	414
(c) 極限分布	417
(d) 応対時間が指数分布にしたがうばあい	420
(e) 系にいる客の数の平均値, および客が系にいる時間の平均値	425
4.4.3 その他の諸問題の展望	428
(a) 客の到着時間間隔, 応対時間の分布がいろいろなばあい	428
(b) 待ち合わせ行列が 1 列でないばあい	429
(c) 待ち合わせ行列の長さ制限があるばあい	429
(d) 平均応対率が一定でないばあい	429
(e) グループサービスをするばあい	430
4.5 待ち合わせ行列の理論の応用——電話需要の予測	430
4.5.1 潜在需要の意味とその確率	430
4.5.2 待ち合わせ行列としての考えかた	431
4.5.3 需要予測法の計算手順	432
4.5.4 実際の数値例	434

4.6 順序づけの問題	435
4.6.1 順序づけの問題の数学模型	436
(a) $n$ 種類の仕事を、おなじ順序で2台の機械 A, B で処理し、いずれの仕事についても機械処理順序が $A \rightarrow B$ であるばあい	437
(b) $n$ 種類の仕事を、おなじ順序で3台の機械 A, B, C で処理し、いずれの仕事についても機械処理順序が $A \rightarrow B \rightarrow C$ であるばあい	440
(c) 2種類の仕事を $m$ 台の機械で処理し、各仕事についての機械処理順序があらかじめあたえられているばあい	442
(1) 論理演算と Gantt 図表による解法   (2) 図式解法	
(d) $n$ 種類の仕事を $m$ 台の機械で処理し、各仕事についての機械処理順序があらかじめあたえられているばあい	448
4.6.2 機械の使用計画の問題	451
4.6.3 組みたて流れ作業調整の問題	454
(a) コンベアの速度が一定であるばあい	456
(b) コンベア上の仕事 $1, 2, \dots, j, \dots$ の空間分布が一様であるばあい	456
(c) コンベア速度が一定で、仕事の分布関数も一様であるばあい	458
演習問題	460
参考文献	466

## 第5章 動的計画法

5.1 動的決定問題と動的計画法	469
5.1.1 動的計画法とはなにか	469
5.1.2 動的決定問題の定式化	471
(a) 動的過程の変換論	471
(b) 多段決定過程	474
5.1.3 関数方程式による定式化	475
(a) 動的決定問題の解析上の難点	475
(b) 利得関数の漸化関数方程式	476
(1) 漸化関数方程式の形式的な誘導	
(2) 漸化関数方程式の最適性の原理による誘導	
(c) 無限多段過程の関数方程式	479
5.1.4 一般関数方程式	481
(a) 離散的確定過程	481

(b) 連続確定過程	483
(c) 離散的確率過程	484
(d) 連続確率過程	486
5.1.5 基本的な関数方程式	486
(a) 多段配分過程の問題	487
(1) 問題   (2) 関数方程式   (3) 解の性質	
(4) 利得が過程のはじまる時刻に関する過程の関数方程式	
(b) 確率的金鉱採掘の問題	490
(1) 問題   (2) 関数方程式   (3) 最適政策の性質	
(c) 最適在庫の問題	494
(1) 問題   (2) 関数方程式   (3) 最適政策の性質	
5.2 変分問題と動的計画法	500
5.2.1 変分問題の動的計画法による定式化	500
(a) 変分問題の関数方程式	500
(b) 数値計算のための漸化関数方程式	504
5.2.2 数値計算の手順	505
5.2.3 動的計画法の特質	508
(1) 次元数のてい減   (2) 絶対的な極値   (3) 付帯条件	
(4) 非解析性   (5) 2点境界値問題   (6) 特殊な問題の定式化	
(7) 政策空間における近似   (8) 解の試験と管理	
(9) 次元数についての問題点	
5.3 動的計画法の応用——大会社における労働力の負荷問題	516
5.3.1 労働力の負荷問題	516
(1) 問題   (2) 需要   (3) 費用	
5.3.2 問題の定式化	519
(a) 問題にたいする条件	519
(b) 費用関数の誘導	521
5.3.3 数値計算	523
演習問題	527
参考文献	531

第6章 在庫管理および取替理論

6.1 在庫管理 . . . . . 533

6.1.1 在庫管理とはなにか . . . . . 533

6.1.2 在庫状況 . . . . . 534

6.1.3 在庫模型—経済的ロット・サイズの決定 . . . . . 536

(a) 非確率模型 . . . . . 537

模型 A, B, C, D, E, F

(b) 確率模型 . . . . . 548

模型 G, H, I, J

6.1.4 統計的在庫管理と安全在庫 . . . . . 555

(a) 2 貯蔵箱方式と循環方式 . . . . . 556

(1) 在庫切れ費用が既知であるばあい

(2) 在庫切れ費用が未知であるばあい

(b) 確率誤差法による発注量, 発注点の決定 . . . . . 560

6.1.5 生産計画に関連させた在庫問題 . . . . . 562

(a) 生産在庫計画問題 . . . . . 562

(1) 費用関数の誘導 (2) 最適在庫量の決定

(b) 在庫管理図 . . . . . 567

6.1.6 在庫をめぐる諸問題 . . . . . 569

(a) ゲームの理論の応用 . . . . . 570

(b) 待ち合わせ行列の理論の応用 . . . . . 572

(c) 動的計画法の応用 . . . . . 575

(d) Arrow-Harris-Marschak の最適在庫政策 . . . . . 577

(e) 自動制御理論の応用 . . . . . 581

6.1.7 在庫管理の実例と応用 . . . . . 585

(1) バイナップルかん詰の在庫問題

(2) 水力発電所の貯水利用計画 (3) 工作機械の作業標準の問題

6.2 取替理論 . . . . . 592

6.2.1 取替理論とはなにか . . . . . 592

6.2.2 取替模型 . . . . . 593

(a) 能率低下が問題となる設備の取替模型 . . . . . 593

模型 A, B, C, D, E, F

(b) 故障が問題となる設備の取替模型 . . . . . 604

模型 G, H, I

6.2.3 設備更新の理論 . . . . . 615

(a) Enon の設備更新理論 . . . . . 615

(b) MAPI 法による設備更新理論 . . . . . 616

6.2.4 予防保全と機械管理 . . . . . 618

(a) 機械保全の問題 . . . . . 618

(b) 運転損失が連続に増加するときの保全問題 . . . . . 621

(c) 部品取替の問題 . . . . . 622

(d) 機械保全の問題(待ち合わせ行列の理論) . . . . . 624

6.2.5 要員問題 . . . . . 625

6.2.6 取替問題の実例 . . . . . 627

(1) 鉄道車輛の取替問題 (2) 公衆電話保全の問題

演習問題 . . . . . 630

参考文献 . . . . . 633

第7章 オペレーションズ・リサーチをめぐる諸問題

7.1 システム工学 . . . . . 635

7.1.1 システム工学とはなにか . . . . . 635

(a) システム問題 . . . . . 635

(b) システム工学の対象 . . . . . 640

(c) システム工学の問題 . . . . . 644

(1) 総括された全体 (2) 目的 (3) 制約

7.1.2 システム工学の近接法 . . . . . 649

(a) 近接の手順 . . . . . 649

(1) 問題の定式化 (2) システムの機能設計

(3) 装置の配置構成 (4) システムの試験

(b) 近接法の特異性 . . . . . 653

(c) 数学模型における問題点 . . . . . 654

(d) 自動システムの設計にたいする注意点 . . . . . 657

7.1.3 プロセス制御 . . . . . 660

7.2 シミュレーション . . . . . 664

7.2.1 シミュレーションとはなにか . . . . . 664

7.2.2 Monte Carlo 法	668
(a) Monte Carlo 法のおいたち	668
(b) Monte Carlo 法の手順	672
(1) 一般的手順	(2) 一様乱数の発生
(3) あたえられた確率分布にしたがう擬似乱数の発生	
7.2.3 Monte Carlo 法の実例	680
(1) 模型をつくる例	(2) 実験例
参 考 文 献	690

## 付 録

A-I 確率分布	693
A-I.1 分布関数と密度関数	693
A-I.2 多次元確率分布	703
A-I.3 確率変数の独立性と条件つき確率	704
A-I.4 分布関数のたたみこみ	705
A-I.5 平均値, 分散および積率	705
A-I.6 母関数	706
A-I.7 おもな確率分布の確率密度関数, 平均値, 分散および母関数	706
A-II 乱数表	709
A-II.1 一様乱数表	709
A-II.2 正規乱数表	711
演習問題解答	713
索 引	719
第4章第4節第2表	巻末に添付

---