



目 次

I	複素数とその 1, 2 次元幾何への応用	1
1.	序 論	3
1.1	実数の代数 \mathbb{R}	3
1.2	高次元	5
1.3	直交群	7
1.4	四元数および八元数の歴史	8
2.	複素数と 2 次元幾何	13
2.1	回転と鏡映	13
2.2	GO_2 および SO_2 の有限部分群	16
2.3	ガウス整数	17
2.4	クライン整数	21
2.5	2次元空間群	21
II	四元数とその 3, 4 次元幾何への応用	25
3.	四元数と 3 次元群	27
3.1	四元数と 3 次元回転	27
3.2	球面幾何	29
3.3	回転群の列挙	35
3.4	有限回転群について	37

3.5	有限四元数群	39
3.6	キラルとアキラル, 二倍体と一倍体	39
3.7	射影的および楕円の群	41
3.8	射影群はすべてを語る	42
3.9	群の幾何学的記述	43
4.	四元数と 4 次元群	49
4.1	はじめに	49
4.2	二つの 2-対-1 写像	50
4.3	群の命名	51
4.4	多面体群の Coxeter 表記	56
4.5	群の列挙に関する歴史	58
4.6	キラル性についての注釈	58
5.	Hruwitz の四元整数	67
5.1	Hruwitz の四元整数	67
5.2	素元と単元	69
5.3	通常の素数の四元数による分解	71
5.4	メタ交換問題	75
5.5	リプシッツ整数の分解	76
III	八元数とその 7, 8 次元幾何への応用	79
6.	組成代数	81
6.1	乗法法則	82
6.2	共役法則	82
6.3	二重化法則	83
6.4	フルピッツの定理の完成	85
6.5	組成代数の他の性質	88
6.6	写像 L_x, R_x, B_x	89
6.7	四元数と八元数の座標	90
6.8	八元数の対称性: 二項結合性	92
6.9	他の体上の代数	93
6.10	1 平方, 2 平方, 4 平方そして 8 平方恒等式	94
6.11	多項平方恒等式: フィスター理論	95

7.	モウファン・ループ	101
7.1	インバース・ループ	101
7.2	イソトピー	103
7.3	モノトピーとそのコンパニオン	105
7.4	モウファン法則の異なる形式	107
8.	八元数と 8 次元幾何	109
8.1	イソトピーと SO_8	110
8.2	直交イソトピーとスピニング	112
8.3	トリアリティ (Triality)	112
8.4	7 個の右で左を作る	113
8.5	他の乗算定理	115
8.6	3 個の 7 次元群が 1 個の 8 次元群内にある	117
8.7	コンパニオンについて	119
9.	八元整数 O	121
9.1	整数性の定義	122
9.2	八元整数に向かって	123
9.3	Korkine, Zolotarev, Gosset の格子 E_8	129
9.4	剰余を伴う除算とイデアル	133
9.5	O^8 における因数分解	136
9.6	素元分解の個数	140
9.7	八元整数分解の“メタ問題”	143
10.	O の自己同型と部分環	145
10.1	240 個の単位八元整数	145
10.2	2 種類の直交性	147
10.3	O の自己同型群	148
10.4	八元整数単元環	153
10.5	単元部分環の安定化	156
11.	O を 2 を法として読む	161
11.1	なぜ 2 を法として読むか	161
11.2	2 を法とした E_8 格子	163
11.3	何が $\langle \lambda \rangle$ を固定するか	167
11.4	単元環以外の 2 を法とした部分環	172

12. 八元数射影平面 $\mathbb{O}P^2$	175
12.1 例外リー群と Freudenthal の “Magic Square”	175
12.2 四元射影平面	176
12.3 $\mathbb{O}P^2$ の座標	178
関連図書	183
訳者あとがき	187
索引	189