目　次

序

第1編　集合·位相·測度 1

第1章　集　合 3

§1　集合とその演算 3

§2　写像 (mapping) 6

§3　計量数 (濃度) 10

§4　関　係 11

§5　ZORN の公理 15

第2章　位相空間 17

§6　EUCLID 空間 17

§7　位相空間 20

§8　連続写像 24

§9　位相空間の構成 26

§10　連結性 27

§11　分離の条件 (HAUSDORFF 空間と正規空間) 28

§12　コンパクト性 32

§13　局所コンパクト性 34

第3章　距離空間 36

§14　収　束 36

§15　距離空間における一様性 39

§16　距離空間の構成 41

§17　BANACH 空間, HILBERT 空間 45

第4章　測　度 49

§18　序　論 49

§19　BOREL 集合体, LEBESGUE 式測度 52

§20　測度空間の構成 I (CARATHÉODORY の外測度, JORDAN 測度の拡張) 57

§21 EUCLID 空間における測度 61
§22 測度空間の構成 II (直積測度) 64
第5章 LEBESGUE 積分 68
§23 RIEMANN 積分と LEBESGUE 積分との比較 68
§24 可測函数 73
§25 LEBESGUE 式積分 75
§26 函数空間 83
§27 連続函数の積分と測度 86
§28 集合函数と RADON-NIKODYM の定理 88
第2編 HILBERT 空間および BANACH 空間 95
第1章 ノルム空間. HILBERT 空間 97
§1 ノルム空間 97
§2 pre-HILBERT 空間 101
§3 加法的作用素. 連続作用素 103
§4 BANACH 空間. HILBERT 空間 106
§5 完備化 109
第2章 射影. RIESZ の定理 116
§6 射 影 116
§7 RIESZ の定理 119
§8 ARONSZAJN の再生核. BERGMAN の核函数 120
§9 DIRICHLET 式ノルムに対する再生核 123
第3章 直交系. 基底 129
§10 SCHMIDT の直交化 129
§11 BESSEL 不等式. PARSEVAL 等式 131
§12 再生核の具体的表現. BERGMAN 核函数の具体的表現 137
§13 BANACH 空間の基底 140
第4章 MILGRAM-LAX の定理. DIRICHLET 問題の抽象的積分方程式への転換 142
§14 MILGRAM-LAX の定理 142

§15 共役偏微分作用素. 弱い解. WEYL-SCHWARTZ の定理 144
§16 GARDING 不等式. DIRICHLET 問題 147
§17 GARDING 不等式の証明 153
第5章 HAHN-BANACH の拡張定理 158
§18 HAHN-BANACH の拡張定理 158
§19 共役空間 163
§20 共役作用素 167
第6章 共鳴定理, 弱収束, エルゴード理論 171
§21 共鳴定理 171
§22 弱収束と強収束 173
§23 G. D. BIRKHOFF の個別エルゴード定理と J. von NEUMANN の平均エルゴード定理 177
§24 個別エルゴード定理の証明 179
§25 平均エルゴード定理の証明 182
§26 エルゴード性と測度可遷性 186
§27 不変測度を有する MARKOFF 過程 189
第7章 WEYL-SCHWARTZ の定理の証明 193
§28 FRIEDRICHS-LAX-NIRENBERG の定理と SOBOLEFF の補助定理 193
§29 SOBOLEFF 補助定理 7.2 の証明 193
§30 FRIEDRICHS-LAX-NIRENBERG の定理の証明 196
§31 補助定理 1 の証明 200
§32 補助定理 2 の証明 202
§33 補助定理 3 の証明 203
第8章 Semi-group の微分可能性と表現 208
§34 Semi-group の例など 209
§35 Semi-group の微分可能性 211
§36 生成作用素 214
§37 Semi-group の表現 217
§38 生成作用素の特徴づけ 219
§39 Semi-group が group になるための条件 222

第9章 発展方程式の CAUCHY 問題 225
§40 拡散方程式の CAUCHY 問題 226
§41 波動方程式の CAUCHY 問題 233
第10章 抽象的積分方程式論 (RIESZ-SCHAUDER の理論) 239
§42 完全連続作用素 241
§43 基底のある BANACH 空間における完全連続作用素 245
§44 抽象的積分方程式 $x-Kx=y$ の連立1次方程式への転換 247
§45 RIESZ-SCHAUDER の理論 250
§46 BANACH の可逆定理による定理 10.1 の証明 254
§47 完全連続作用素の固有値の分布 258
第11章 自己共役作用素のスペクトル分解 262
§48 対称作用素, 閉作用素および自己共役作用素 263
§49 CAYLEY 変換 269
§50 対称作用素の共役作用素の構造 271
§51 単位の分解 275
§52 自己共役作用素のスペクトル分解 282
§53 スペクトル分解の例 285
§54 実作用素. FRIEDRICHS の定理 286
第12章 ユニタリ作用素のスペクトル分解 291
§55 HELLY の選出定理 291
§56 正の定符号数列. HERGLOTZ の定理 293
§57 ユニタリ作用素のスペクトル分解 296
第13章 固有値問題 300
§58 自己共役作用素のスペクトル 300
§59 スペクトルの存在範囲. KRYLOFF-WEINSTEIN の定理 303
§60 連続スペクトルのないための十分条件. HILBERT-SCHMIDT 式の展開定理 305
§61 展開定理の例としての STURM-LIOUVILLE 型の境界値問題 306
§62 展開定理 (*61.5*) をより具体的に書き直すこと 312
§63 補助定理2の証明 316

第14章 WEYL-STONE-TITCHMARSH-KODAIRA の展開定理 319
§64 境界の極限点型と極限円型への分類 319
§65 WEYL-STONE-TITCHMARSH-KODAIRA の展開定理 321
あとがき 328
第3編 超函数 331
第1章 超函数の概念 333
§1 汎函数の微分法 [1次元] 333
§2 多変数の場合 336
§3 超函数 340
§4 連続性の効果 346
§5 局所可積分函数 353
§6 測 度 356
§7 局所と全域の関係. 超函数の台 363
第2章 位相の考察 368
§8 セミノルム系. $(\mathfrak{D}_K)$ の位相 368
§9 $(\mathfrak{D})$ の局所凸位相 374
§10 共役空間の代数的関係 378
§11 $(\mathfrak{D}_K)$ の完備性. 単純収束定理 382
§12 共役空間の位相 385
§13 共役写像. 諸演算の連続性 391
§14 全有界性と強収束定理 396
§15 $(\mathfrak{D})$, $(\mathfrak{E})$ の反射性 400
第3章 合成積と素解 403
§16 合成積と積分記号についての検討 403
§17 素解の概念 406
§18 パラメトリックスと合成積 410
§19 反復ラプラシアンの素解 414
§20 解析接続と擬函数 419
§21 超函数の階数. 構造定理 423

第4章 核超函数と直積 429
§22 双線型写像の連続性. 核超函数 429
§23 核の存在と一意性 434
§24 超函数の直積 438
§25 代入, 変数変換 444
§26 一般合成積 446
第5章 FOURIER 級数. FOURIER 変換 452
§27 トーラス上の超函数の FOURIER 展開 452
§28 急減少函数 456
§29 緩増加超函数の FOURIER 変換 459
索 引 469