

目次

9	積分区域の変換	1
9.1	線積分から面積分への変換 ◊	1
9.1.1	スカラー場の線積分の変換 ◊	1
9.1.2	Stokes の定理 ◊	3
9.2	面積分から体積分への変換 ◊	5
9.2.1	トポロジカル球面上の積分の変換 ◊	5
9.2.2	一般閉曲面上の積分の変換 ◊	8
9.2.3	場についての仮定を弱める	9
9.3	不連続面がある場合の面積分の変換	11
9.3.1	場の勾配が不連続面を持つ場合	11
9.3.2	場自身が第一種不連続面を持つ場合	12
9.4	場の不連続面における発散と回転	18
9.4.1	発散	18
9.4.2	回転	20
10	物理学への重要な応用例	23
10.1	Gauss の定理の応用; 連続の式	23
10.1.1	質量の保存則	23
10.1.2	電荷保存の法則	26
10.2	テンソルの応用	27
10.2.1	応力と応力テンソル	28
10.2.2	力の密度	31
10.2.3	流体の圧力	31
10.3	粘性流体の運動方程式	32
10.3.1	速度勾配テンソルの分解	33
10.3.2	$\nabla \times \vec{v}$ の物理的意味	34
10.3.3	$\nabla \cdot \vec{v}$ の物理的意味	34
10.3.4	歪み速度テンソル	34

10.3.5	粘性応力テンソル	36
10.3.6	Navier Stokes の方程式	38
10.3.7	ベクトル場の発散と回転は自由に指定出来ること	39
10.4	渦に関する定理	39
10.4.1	渦度方程式	39
10.4.2	渦線、渦面、渦管、循環	40
10.4.3	Kelvin の循環定理	42
10.4.4	乱流の機構	43
10.5	Maxwell の方程式	44
10.5.1	Maxwell の方程式と相対性原理	44
10.5.2	真空の誘電率と透磁率	45
10.5.3	電荷保存の法則の導出	46
10.5.4	荷電粒子の電荷の不変性	47
10.5.5	電磁場のエネルギーと運動量	48
10.5.6	初期値問題	51
10.6	電磁波の存在	52
10.6.1	ダランベールの波動方程式	52
10.6.2	平面波	53
10.7	時空概念の変革	57
10.7.1	Lorentz 変換	57
10.7.2	光速度の不変性の確認	64
10.7.3	Minkowski 空間	66
11	ポテンシャル	67
11.1	渦無しの場合とスカラーポテンシャル:単連結領域の場合 ◊	67
11.1.1	渦無しの場合と保存的な場 ◊	67
11.1.2	保存的な場のスカラーポテンシャル ◊	68
11.1.3	渦無しの場合と保存的な場とポテンシャル場の同等性 ◊	70
11.2	定義域が単連結でない場合の議論	71
11.2.1	渦無しの場合と周期的な場	71
11.2.2	一般の場合	75
11.2.3	周期的な場のポテンシャル	82
11.2.4	渦なし場と周期的な場とポテンシャル場の同等性 ◊	83
11.3	スカラーポテンシャルの応用例	84
11.3.1	ポテンシャルの重ね合わせ ◊	84
11.3.2	重力場 ◊	84
11.3.3	静止点電荷が作る電場 ◊	86
11.3.4	速度ポテンシャル	88

11.3.5	球の回りの流れ	91
11.3.6	ある連立偏微分方程式の可解条件	93
11.4	Coulomb の場	94
11.4.1	全空間での境界値問題と解の一意性	94
11.4.2	Coulomb 場の問題の設定	95
11.4.3	Poisson の方程式	96
11.4.4	重ね合わせの原理	96
11.4.5	Dirac の δ 関数	98
11.4.6	Coulomb のポテンシャル	100
11.5	ベクトルポテンシャル	102
11.5.1	概観	102
11.5.2	ベクトルポテンシャルの存在:定義域=全空間の場合	105
11.5.3	ベクトルポテンシャルの存在:定義域=任意の有界領域の場合	110
11.6	Biot-Savart の場	112
11.6.1	問題の設定	112
11.6.2	Coulomb の条件	113
11.6.3	Biot-Savart のポテンシャル	114
11.6.4	Coulomb の条件の検証	114
11.6.5	\vec{B} の算出	115
11.6.6	全空間における境界値問題 (7-10-1) の解	116
11.7	Maxwell 方程式の特解	116
11.7.1	問題の設定	116
11.7.2	電磁場のポテンシャル	117
11.7.3	Lorentz の条件	117
11.7.4	遅延ポテンシャルと前進ポテンシャル	118
11.7.5	電磁場の遅延ポテンシャルと Lorentz 条件	123
11.7.6	電磁場の算出	124
11.8	発散無しの場合のその他の表現法	125
11.8.1	Clebsch のポテンシャル	125
11.8.2	対称性をもつ場	129
11.8.3	並進対称性を持つ場	130
11.8.4	軸対称な発散無しの場合	132
11.8.5	らせん対称で発散無しの場合	135
12	調和関数と境界値問題	139
12.1	非同次方程式と同次方程式	139
12.2	調和関数	141
12.3	曲面上の源による Coulomb ポテンシャル	142

12.3.1	一重層ポテンシャル◇	142
12.3.2	双極子のポテンシャル◇	144
12.3.3	二重層ポテンシャル◇	144
12.4	調和関数論の基本公式◇	146
12.4.1	Green の公式◇	146
12.4.2	基本公式の導出◇	147
12.4.3	物理的な考察◇	149
12.5	調和関数の性質◇	152
12.5.1	解析性◇	152
12.5.2	平均値の定理◇	152
12.5.3	二つの調和関数が一致する局所的条件◇	153
12.5.4	最大値原理◇	154
12.6	Dirichlet の境界値問題◇	155
12.6.1	境界値問題とは◇	155
12.6.2	Dirichlet 問題の解の一意性◇	156
12.6.3	Green 関数◇	157
12.6.4	Poisson の問題の解の存在◇	160
12.6.5	Laplace 方程式の Dirichlet 問題◇	161
12.6.6	Poisson 方程式の Dirichlet 問題◇	163
12.6.7	Dirichlet 問題の可解性◇	164
12.6.8	調和関数の孤立特異点◇	166
12.6.9	外部問題について◇	167
12.7	Neumann 問題◇	169
12.7.1	可解条件◇	169
12.7.2	解の勾配の一意性◇	170
12.7.3	Neumann 関数◇	171
12.7.4	Neumann 問題の可解性◇	175
13	ベクトル場の境界値問題	177
13.1	境界値問題の設定◇	177
13.1.1	方程式が解を持つ条件◇	177
13.1.2	特解の存在◇	178
13.1.3	境界条件◇	180
13.2	単連結領域における境界値問題◇	181
13.2.1	第一種境界値問題◇	182
13.2.2	第二種境界値問題◇	185
13.3	3D トーラスにおける境界値問題◇	185
13.3.1	周期 $p(\neq 0)$ を持つ特解◇	186

13.3.2	第一種境界値問題◇	188
13.3.3	第二種境界値問題◇	190
13.3.4	周期と flux の関係	190
13.3.5	有界な一般区域における境界値問題	191
14	一般曲線座標系	193
14.1	2種類の基本ベクトル◇	193
14.2	場の反変および共変成分◇	196
14.3	計量テンソル◇	198
14.4	内積と外積◇	200
14.5	微分演算子◇	202
15	擬ベクトルと擬スカラー	203
15.1	擬ベクトル	203
15.2	擬スカラー	208
15.3	擬ベクトルと擬スカラーを含む算法	210
15.3.1	計算の原則	210
15.3.2	積	210
15.3.3	和	211
15.3.4	既述の定理・公式の拡張	212
15.3.5	磁束密度が擬ベクトル量であること	212