

目次

1	ベクトルの算法	1
1.1	ベクトル空間とベクトル	1
1.1.1	ベクトル空間	1
1.1.2	ベクトルの三要素と相等	3
1.2	ベクトルの和	5
1.3	実数とベクトルの積	7
1.3.1	単位ベクトル	8
1.3.2	もう一つの分配則	9
1.4	ベクトルの差	9
1.5	ベクトル算法の応用	11
1.5.1	幾何学的応用	11
1.5.2	ベクトル量とベクトル算法	12
1.6	射影	13
1.6.1	二つのベクトルがなす角	13
1.6.2	射影	13
1.6.3	ベクトルの分解	15
1.6.4	ベクトル和の射影は射影の和に等しいこと	15
1.7	ベクトルの内積(スカラー積)	16
1.7.1	定義と公式	16
1.7.2	内積の応用	18
1.8	外積(ベクトル積)	21
1.8.1	定義と公式	21
1.8.2	外積の応用: 角速度ベクトル	24
1.9	スカラー三重積	25
1.10	ベクトル三重積	27
1.11	Lorentz の力	29
1.11.1	点電荷に働く力	30
1.11.2	拡がりを持つ電荷に働く力密度	33

1.11.3	電磁場の運動量とエネルギー	34
1.11.4	自己場の効果	34
2	ベクトルの直交座標成分	43
2.1	ベクトルの分解	43
2.1.1	一次独立と一次従属	43
2.1.2	三個のベクトルによる一意的分解	46
2.2	直交座標成分とベクトル算法	47
2.2.1	ベクトルの座標成分	47
2.2.2	直交基本ベクトルの相互関係	47
2.2.3	直交座標成分の求め方	48
2.2.4	実数とベクトルの積	49
2.2.5	ベクトルの和	50
2.2.6	内積	50
2.2.7	外積	51
2.2.8	Einstein の規約	51
2.2.9	スカラー三重積	52
3	テンソル	53
3.1	線形関数	53
3.1.1	線形関数の基本的な性質	53
3.1.2	線形実数値関数	54
3.1.3	ベクトル値線形関数	55
3.2	dyad	56
3.3	テンソル	58
3.3.1	dyadics とテンソル	58
3.3.2	ベクトル値線形関数とテンソル	60
3.4	テンソルの内積	62
3.5	各種のテンソル	64
3.5.1	ゼロテンソル	64
3.5.2	単位テンソル	64
3.5.3	転置テンソル	65
3.5.4	ベクトルとテンソルとの外積	66
3.5.5	対称テンソル	66
3.5.6	反対称テンソル	67
3.5.7	反対称テンソルとベクトルの対応	67
3.5.8	一般のテンソルの分解	68
3.5.9	高階のテンソル	69

3.6	テンソルの直交座標成分◇	70
3.6.1	テンソルの算法と成分行列◇	70
3.6.2	各種のテンソルの直交座標成分◇	71
3.7	テンソルの縮約: trace◇	73
3.8	ベクトルの一次方程式◇	73
3.8.1	数の一次方程式との対比◇	74
3.8.2	準備◇	74
3.8.3	解の存在と不定性◇	78
3.8.4	逆テンソル: $\text{rank } \vec{Q} = 3$ の場合 ◇	80
3.8.5	$\text{rank } \vec{Q} \leq 2$ の場合	81
3.9	固有値問題◇	82
3.9.1	固有値と固有ベクトル◇	82
3.9.2	固有方程式◇	83
3.9.3	対称 テンソルの固有値と固有ベクトル◇	84
3.9.4	対称でないテンソルの固有値と固有ベクトルについて	86
3.10	回転変換◇	90
3.10.1	変換係数に対する条件◇	90
3.10.2	逆変換の係数◇	91
3.10.3	座標成分によるベクトルとテンソルの定義◇	92
3.10.4	諸量の座標成分の変換性	93
3.11	座標軸の反転	97
4	ベクトルとテンソルの微分積分	101
4.1	一変数関数の微分◇	101
4.1.1	関数の連続性◇	101
4.1.2	微分可能性と微係数◇	102
4.1.3	関数の増分と微分可能条件◇	103
4.1.4	公式◇	104
4.1.5	導関数の直交座標成分◇	105
4.1.6	テイラー展開	106
4.1.7	微分の応用	107
4.2	多変数関数の微分◇	109
4.2.1	多変数関数の連続性◇	109
4.2.2	偏微分◇	111
4.2.3	多変数関数の微分可能性◇	111
4.2.4	関数の関数の微分◇	113
4.2.5	多変数関数のテイラー展開	114
4.3	一変数関数の積分◇	115

4.3.1	積分の応用	116
4.4	ベクトルの常微分方程式◇	116
4.4.1	1階の常微分方程式◇	117
4.4.2	2階の常微分方程式◇	119
5	ベクトル空間の変更	123
5.1	異なるベクトル空間のベクトル	123
5.2	ガリレイ変換	126
5.3	電磁場のガリレイ変換	127
5.4	剛体の回転	129
5.5	ベクトルの時間変化率の変換式	131
5.6	コリオリの力	133
5.7	地球上の振り子	134
6	場とその勾配	139
6.1	場とは◇	139
6.2	場の微分可能性と勾配◇	140
6.2.1	場の微分可能性◇	140
6.2.2	場の勾配◇	141
6.2.3	∇ 演算子について◇	142
6.2.4	全微分と勾配◇	143
6.2.5	多変数関数の導関数としての勾配◇	143
6.3	場の各種微係数と勾配◇	144
6.4	勾配の直交座標成分◇	147
6.4.1	成分を求める式◇	147
6.4.2	直交変換則の検証	148
6.5	Lagrange の時間微分◇	150
6.5.1	観測点と時間微分◇	150
6.5.2	流体力学の Euler 方程式◇	151
6.6	スカラー場の勾配と等位面◇	153
6.6.1	等位面◇	153
6.6.2	勾配の幾可学的意味◇	154
6.6.3	応用例◇	155
6.6.4	2個のスカラー場の従属条件◇	155
6.6.5	3個のスカラー場の従属条件	157
6.6.6	応用:大気の圧力分布	157
6.7	勾配に関する公式◇	159
6.8	円柱座標系と極座標系	160

6.8.1	直交座標系	160
6.8.2	円柱座標系	161
6.8.3	極座標系	166

7 場の積分 171

7.1	区域の内部、外部、境界および形について	171
7.1.1	開球と内点	171
7.1.2	開集合	173
7.1.3	境界点と閉集合	174
7.1.4	領域、閉域、区域、閉包、開核	176
7.1.5	“区域における”連続性について	178
7.1.6	単連結と多重連結	179
7.1.7	同相写像	181
7.1.8	トポロジー	181
7.1.9	トポロジカルな球	183
7.1.10	単純な曲面	183
7.2	体積分 \diamond	184
7.2.1	Riemann 積分の定義 \diamond	184
7.2.2	広義積分について	186
7.3	面積分 \diamond	187
7.4	面素ベクトルの直交座標成分 \diamond	188
7.5	閉じた曲面上の面積分の例 \diamond	189
7.6	微小な閉曲面上の積分 \diamond	192
7.6.1	スカラー場の面積分と勾配 \diamond	192
7.6.2	スカラー場の勾配の物理的意味 \diamond	193
7.6.3	ベクトル場の面積分と勾配 \diamond	194
7.6.4	ベクトル場の内積面積分と発散 \diamond	195
7.6.5	発散の物理的意味と連続の式 \diamond	196
7.6.6	ベクトル場の外積面積分と回転 \diamond	197
7.6.7	回転の物理的意味 \diamond	198
7.6.8	一般の場の面積分と勾配 \diamond	199
7.6.9	テンソル場の内積面積分と発散 \diamond	200
7.6.10	テンソル場の外積面積分	201
7.7	線積分 \diamond	202
7.8	閉じた曲線上の線積分の例 \diamond	203
7.9	微小な閉曲線上の積分 \diamond	206
7.9.1	スカラー場の線積分 \diamond	206
7.9.2	ベクトル場の線積分 \diamond	206

7.9.3	ベクトル場の内積線積分 \diamond	207
7.9.4	ベクトル場の外積線積分	208
7.9.5	一般のテンソル場の線積分	209
7.10	発散と回転の重要さを示す定理 \diamond	210
8	微分演算に関する計算公式	211
8.1	一階微分演算に関する公式 \diamond	211
8.1.1	公式の証明 \diamond	212
8.2	2階微分演算に関する公式 \diamond	214
8.2.1	発散と回転がゼロになる公式 \diamond	214
8.2.2	Laplacian \diamond	214
8.2.3	$\nabla \times (\nabla \times \vec{f})$ の分解公式 \diamond	215
8.3	円柱座標系と極座標系における微分演算子	216
8.3.1	発散 $\nabla \cdot \vec{f}$	216
8.3.2	回転 $\nabla \times \vec{f}$	217
8.3.3	Laplacian $\Delta \alpha$	218
8.3.4	Laplacian $\Delta \vec{f}$	220

