

# 目次

改訂版 はじめに	i
<b>● 第 I 部 面積とは何か</b>	
<b>第 1 章 素朴な面積の理論 (ルベーグ以前)</b>	3
1.1 ジョルダンによる面積の定義	4
1.1.1 面積はどうやって測定するか?	5
1.1.2 ジョルダンによる面積の定義	6
1.2 ジョルダンの意味で面積が測定できない図形	14
<b>第 2 章 ルベーグの意味の面積</b>	19
2.1 有限の世界と無限の世界	19
2.2 ルベーグによる面積の定義	22
<b>第 3 章 面積を測定できる図形とルベーグ測度</b>	39
3.1 ルベーグ測度の完全加法性	39
3.2 どのような図形がルベーグ可測か	45
3.2.1 ルベーグ測度とジョルダンの意味の面積	45
3.2.2 単純な図形のルベーグ測度	47
3.2.3 閉集合のルベーグ可測性	49
3.2.4 開集合のルベーグ可測性	52
3.2.5 面積を測定できる図形の位相数学的な特徴づけ	57
3.3 外測度が $\infty$ の図形のルベーグ可測性について	60
<b>第 4 章 ルベーグ測度の代数的および幾何的性質</b>	65
4.1 ルベーグ可測集合族の代数と等測包	65
4.2 ルベーグ測度の平行移動と回転不変性について	71

第 5 章	カラテオドリによるルベーク可測性の特徴づけ	77	11.2.1 分布等式	164	
第 6 章	$d$ 次元ルベーク測度	84	11.2.2 ミンコフスキーの積分不等式	165	
			11.2.3 アフィン変換による変数変換	166	
			11.2.4 合成積	169	
● 第 II 部	ルベーク積分		第 12 章	$L^p$ 関数のコンパクト台をもつ $C^\infty$ 級関数による近似とその応用	172
第 7 章	ルベーク可測関数	95	第 13 章	ルベーク積分の変数変換の公式	180
7.1	ルベーク可測関数の定義と性質	95	13.1	微分同相写像と写像の微分	180
7.2	可測関数の単関数による近似	103	13.2	ルベーク積分に関する変数変換の公式	183
第 8 章	ルベーク積分	107	13.3	補題 13.4 の証明の準備	185
8.1	ルベーク積分の定義	107	13.4	補題 13.4 の証明	188
8.1.1	非負値可測単関数のルベーク積分	107	13.5	変数変換の公式の証明 (近似理論を駆使)	193
8.1.2	非負値可測関数に対するルベーク積分	111			
8.1.3	実数値・複素数値可測関数のルベーク積分	116	● 第 IV 部	ルベーク測度以外の測度	
8.2	「ほとんどすべての点で成り立つ」という考え方	121		- ハウスドルフ測度と抽象的測度 -	
● 第 III 部	ルベーク積分の重要な定理		第 14 章	無視できない測度 0 の図形—カントル集合	199
第 9 章	ルベークの収束定理	131	14.1	カントル集合	199
9.1	概収束	131	14.2	カントルの悪魔の階段	205
9.2	ルベークの収束定理	133	14.3	正方形を埋め尽くすほとんどいたるところ微分可能な曲線	207
9.3	ルベーク積分とリーマン積分	136	第 15 章	不思議な測度 0 の図形—ベシコヴィッチ集合	210
9.4	積分と微分記号の交換について	138	15.1	ベシコヴィッチ集合と実解析学	210
第 10 章	ルベーク積分と $L^p$ 空間	141	15.2	ペロンの木によるベシコヴィッチ集合の構成	213
10.1	$L^p$ 不等式	141	第 16 章	ハウスドルフ測度	222
10.2	バナッハ空間と $L^p$ 空間	149	16.1	曲線の長さ	222
10.2.1	ルベーク積分のどのような点が有用なのか?	152	16.2	曲線の長さを測定できる 1 次元ハウスドルフ測度	225
第 11 章	フビニの定理とその応用例	156	16.3	1 次元ハウスドルフ測度では測れない曲線	236
11.1	フビニの定理	156	16.4	$s$ 次元ハウスドルフ外測度	238
11.2	フビニの定理の応用例	164	16.5	$\mathbb{R}^d$ 上の $s$ 次元ハウスドルフ外測度	243
			第 17 章	ハウスドルフ次元	247
			17.1	ハウスドルフ次元	248

17.2	さまざまな図形のハウスドルフ次元	250
17.2.1	カントル集合のハウスドルフ次元	250
17.2.2	平面上のカントル集合のハウスドルフ次元	256
17.2.3	コッホ曲線のハウスドルフ次元	257
17.2.4	シェルピンスキー・ガスケットのハウスドルフ次元	260
17.3	定理 17.6 の証明	261
17.4	掛谷集合と掛谷予想	266
<b>第 18 章</b>	<b>抽象的な測度と積分</b>	<b>269</b>
18.1	$\sigma$ -集合体と抽象的測度	269
18.2	積分の定義	273
18.3	ルベーグの収束定理	275
18.4	測度を作る——抽象的外測度を使った構成	277
18.5	ホップの拡張定理と確率分布関数への応用	281
18.6	測度論的な確率論	287
<b>付録</b>		
付録 A	実数の基本的な性質	295
A.1	数列の収束	295
A.2	上限と下限	297
付録 B	有界閉集合	300
付録 C	$p$ 進小数	304
付録 D	可算集合, 非可算集合, カントルの定理	311
付録 E	図形の収束——ハウスドルフ収束	314
付録 F	ジョルダン可測性の定義について	321
問題の解答		325
参考文献		343
索引		347