

## 第1部 測度論以前のこと

## 第1章 長さ、面積、体積の昔

- 1.1 測るということ
- 1.2 どんな形でも測れるのか?
- 1.3 円の面積はなぜ  $\pi r^2$  か
- 1.4 アルキメデスのとりつくし法
- 1.5 錐体の体積はなぜ柱体の  $1/3$  か

## 第2章 測り、測られることの数学的基礎1 — 集合

- 2.1 始まりはいつも集合
  - 2.1.1 集合とはなにか? — 素朴な定義
  - 2.1.2 有限集合と無限集合
  - 2.1.3 無限集合の2つの種類
- 2.2 「図形」を集合と見るには
  - 2.2.1 和集合と共通部分、「または」と「かつ」
  - 2.2.2 差集合と否定
  - 2.2.3 集合の分割と同値関係

## 第3章 測り、測られることの数学的基礎2 — 実数と写像

- 3.1 測る「量」としての実数
  - 3.1.1 実数の区間と無限大
  - 3.1.2 実数の実感
  - 3.1.3 実数の連続性について
  - 3.1.4 上極限と下極限
- 3.2 写像
  - 3.2.1 写像の基本
  - 3.2.2 簡単な写像の知識
    - 全射, 単射, 全単射, 逆写像など
  - 3.2.3 ちょっと高度な写像の知識
    - 像と逆像, 制限と拡張など
  - 3.2.4 関数と連続性

## 第2部 具体から抽象へ

## — カラテオドリの条件のパズルとルベーク測度—

## 第4章 基本図形で覆って測る: 外測度の考え方

- 4.1 外測度の考え方
  - 4.1.1 1次元にも複雑な図形がある
  - 4.1.2 複雑な図形をどう測るべきか
  - 4.1.3 「長さゼロ」とは?
  - 4.1.4 区間  $[0, 1]$  の外測度は1か?
- 4.2 外測度の性質
  - 4.2.1 他の種類の区間の外測度と単調性
  - 4.2.2 平行移動不変性と加法性
  - 4.2.3 劣加法性

## 第5章 ルベーク測度

- 5.1 カラテオドリの条件とルベーク可測集合
  - 5.1.1 加法性的パズル — カラテオドリの条件
  - 5.1.2 カラテオドリの条件のパズル: 条件の言い換え
  - 5.1.3 パズル2: 基本的な図形が条件を満たすこと
  - 5.1.4 パズル3: 集合演算が閉じていること
  - 5.1.5 パズル4: 可算個の和集合が閉じていること
- 5.2 ルベーク測度
  - 5.2.1 ルベーク外測度からルベーク測度へ
  - 5.2.2 ルベーク測度の性質
  - 5.2.3 外測度と測度の抽象化への道
  - 5.2.4 ルベーク可測でない集合

### 第3部 抽象から具体へ

## — 測り測られることの本質を抜き出す —

### 第6章 定義で始める測度論 ————— 121

- 6.1 測られるものたち ( $\sigma$ -加法族) と測るもの (測度) の定義 ..... 123
  - 6.1.1  $\sigma$ -加法族の定義 ..... 123
  - 6.1.2 測度の定義 ..... 125
- 6.2  $\sigma$ -加法族の簡単な例 ..... 127
  - 6.2.1 有限集合上の  $\sigma$ -加法族 ..... 127
  - 6.2.2 一般の集合上の  $\sigma$ -加法族の簡単な例 ..... 132
  - 6.2.3  $\sigma$ -加法族の大小関係 ..... 135
- 6.3 測度の簡単な例 ..... 137
  - 6.3.1 自明な測度と有限集合上の測度 ..... 137
  - 6.3.2 有限分割を持つ集合上の測度 ..... 140
  - 6.3.3 ちょっと変わった測度 (ディラック測度) ..... 142

### 第7章 そして定義から性質を導く ————— 145

- 7.1  $\sigma$ -加法族の性質を定義から導く ..... 146
  - 7.1.1 もっともやさしい性質の証明 ..... 146
  - 7.1.2 色々な集合演算についても閉じていること ..... 147
- 7.2 測度の性質を定義から導く ..... 150
  - 7.2.1 有限加法性 ..... 150
  - 7.2.2 単調性と劣加法性 ..... 153
  - 7.2.3 連続性 ..... 156

### 第8章 測度の構成という問題 ————— 161

- 8.1  $\sigma$ -加法族の構成 ..... 162
  - 8.1.1 集合族から生成された  $\sigma$ -加法族 ..... 162
  - 8.1.2  $\sigma$ -加法族より弱い集合族 ..... 165
- 8.2 前測度から測度へ ..... 168
  - 8.2.1 前測度の拡張としての測度 ..... 168
  - 8.2.2 拡張定理 ..... 170
  - 8.2.3 本質的な例: 直線上の「長さ」とはなにか? ..... 172
  - 8.2.4 ルベーク測度の問題 ..... 176

### 第4部 積分を再発明する — ルベーク積分の世界 —

### 第9章 ルベーク積分 ————— 181

- 9.1 リーマン積分からルベーク積分へ ..... 182
  - 9.1.1 積分の復習 ..... 182
  - 9.1.2 リーマン積分の弱点 ..... 185
  - 9.1.3 高さをコントロールする — ルベーク積分のアイデア ..... 188
- 9.2 ルベーク積分の構成 ..... 190
  - 9.2.1 可測関数 ..... 190
  - 9.2.2 単関数とその積分 ..... 196
  - 9.2.3 可測関数を単関数で近似する ..... 198
  - 9.2.4 一般の積分 ..... 204
  - 9.2.5 ルベーク積分の基本的な性質 ..... 206

### 第10章 ルベーク積分の御利益の色々 ————— 213

- 10.1 収束定理の色々 ..... 214
  - 10.1.1 単調収束定理 ..... 214
  - 10.1.2 収束定理のヴァリエーション ..... 216
  - 10.1.3 収束定理が適用できない例 ..... 219
- 10.2 フビニの定理 ..... 223
  - 10.2.1 具体的に: 2次元のルベーク測度 ..... 223
  - 10.2.2 抽象的に: 直積測度 ..... 226
  - 10.2.3 フビニの定理 ..... 229
- 10.3 微分との関係 ..... 235
  - 10.3.1 積分と微分との交換 ..... 235
  - 10.3.2 微積分学の基本定理 ..... 237
  - 10.3.3 ルベーク積分論における微分学 ..... 239
  - 10.3.4 最後に ..... 245

- 参考文献 ..... 247
- 索引 ..... 249