

目 次

はじめに	1
1 行 列	5
1.1 行 列	5
1.1.1 定 義	5
1.1.2 ブロック行列	9
1.1.3 非零パターン	10
1.2 行列の演算	12
1.2.1 和とスカラー倍	12
1.2.2 積	14
1.2.3 直 和	16
1.2.4 Kronecker 積	16
1.2.5 Hadamard 積	18
1.3 逆 行 列	19
1.3.1 定 義	19
1.3.2 ブロック行列の逆行列	20
1.4 転置と共役	25
1.4.1 定 義	25
1.4.2 対称行列と Hermite 行列	26
1.4.3 直交行列とユニタリ行列	27
1.5 ト レ ー ス	28
1.6 ノ ル ム	29
1.7 特殊な行列	34
1.7.1 優対角行列	34
1.7.2 巡回行列など	35

2	行列式	37
2.1	置 換	37
2.2	行列式の定義	39
2.3	多重線形性	42
2.3.1	多重線形性と交代性	42
2.3.2	行列式の特徴づけ	45
2.4	諸 公 式	48
2.5	展 開 公 式	51
2.5.1	Laplace 展 開	51
2.5.2	一般化 Laplace 展開	54
2.5.3	Binet-Cauchy 展開	57
2.6	余 因 子	59
2.7	行列式の計算法	61
3	基本変形と掃き出し	63
3.1	行列の基本変形	63
3.1.1	行基本変形	63
3.1.2	列基本変形	66
3.2	階数標準形	67
3.3	既約階段形	72
3.4	逆行列の計算	75
4	階 数	79
4.1	階数の定義	79
4.1.1	小行列式による定義	79
4.1.2	列ベクトルによる定義	81
4.1.3	行ベクトルによる定義	84
4.1.4	定義の等価性	85
4.2	階数標準形と既約階段形の一意性	86
4.3	階数の性質	87
4.3.1	基本的性質	87
4.3.2	劣モジュラ性	91

4.4	階数の工学的意味	94
4.4.1	メカニズムの自由度	94
4.4.2	制御システムの可制御性	97
5	線形方程式系	99
5.1	解の存在と一意性	99
5.2	解のパラメータ表示	104
5.3	掃き出し法	105
5.4	Cramer の公式	107
5.5	微分方程式の差分近似から生じる方程式	108
5.6	Sylvester 方程式	111
5.7	Lyapunov 方程式	114
6	固 有 値	117
6.1	固有値と固有ベクトル	117
6.1.1	定 義	117
6.1.2	特 性 方 程 式	118
6.1.3	Gershgorin の定理	120
6.1.4	一般化固有値問題	124
6.2	固有値の工学的意味	124
6.2.1	線形ダイナミカルシステム	125
6.2.2	主成分分析	125
6.2.3	構造物の振動解析	126
6.2.4	Markov 連鎖の定常分布	126
6.3	対称行列の固有値	127
6.3.1	直交変換による対角化	127
6.3.2	最大最小定理	132
6.3.3	摂 動 定 理	135
6.4	Hermite 行列の固有値	136
6.4.1	ユニタリ変換による対角化	136
6.4.2	最大最小定理	138
6.4.3	摂 動 定 理	139

6.5	Schur 分解	139	8.1.2	複素行列の場合	211
6.6	正規行列	142	8.2	特異値の性質	213
6.7	一般の行列の固有値	144	8.3	最小 2 乗法	216
6.7.1	固有空間	144	9	ベクトル空間	219
6.7.2	一般化固有空間	146	9.1	ベクトル空間	219
6.8	Jordan 標準形	150	9.1.1	定義	219
6.8.1	定理	150	9.1.2	諸例	221
6.8.2	構成法	153	9.2	部分空間	222
6.8.3	一意性の証明	159	9.2.1	定義	222
6.8.4	計算例	160	9.2.2	諸例	224
6.8.5	行列のべき乗	172	9.2.3	部分空間の共通部分と和	224
6.8.6	行列の指数関数	175	9.2.4	補空間, 商空間	226
6.8.7	単因子との関係	179	9.3	線形独立性, 線形従属性	227
7	2 次形式	181	9.4	基底	228
7.1	2次形式の定義	181	9.4.1	定義	228
7.2	対称行列の正定値性	181	9.4.2	諸例	230
7.2.1	定義と判定条件	181	9.4.3	次元が関係する公式など	233
7.2.2	性質	186	9.4.4	座標と基底の取替え	234
7.3	Hermite 行列の正定値性	190	9.5	線形写像	236
7.4	工学における正定値行列	192	9.5.1	定義	236
7.4.1	確率変数	192	9.5.2	諸例	237
7.4.2	構造力学	194	9.5.3	行列表現	239
7.4.3	微分方程式	201	9.5.4	線形写像の空間	242
7.4.4	回路とグラフ	201	9.5.5	不変部分空間	244
7.5	Sylvester の慣性則	205	9.5.6	同型	245
7.5.1	対称行列の場合	205	9.5.7	射影	246
7.5.2	Hermite 行列の場合	208	9.6	内積	248
8	特異値と最小 2 乗法	209	9.6.1	定義	249
8.1	特異値の定義	209	9.6.2	諸例	250
8.1.1	実行列の場合	209	9.6.3	正規直交基底	252
			9.6.4	直交補空間	253

9.6.5	共 役 写 像	254
9.6.6	正 射 影	255
9.6.7	ノ ル ム 空 間	257
9.6.8	Hilbert 空 間	260
9.6.9	Banach 空 間	264
9.7	双 対 空 間	266
9.7.1	定 義	266
9.7.2	諸 例	267
9.7.3	双 対 基 底	268
9.7.4	第 2 双 対 空 間	271
9.7.5	零 化 空 間	272
9.7.6	双 対 写 像	272
9.8	行列の階数—ベクトル空間の観点から	274
9.8.1	階 数 と 次 元	274
9.8.2	階数に関する不等式	277
9.9	マトロイド—線形独立性のもつ組合せ構造	279
参 考 文 献	283
お わ り に	287
索 引	289