

# 目 次

は じ め に . . . . .	1
1 行 列 . . . . .	5
1.1 行 列 . . . . .	5
1.1.1 定 義 . . . . .	5
1.1.2 ブロック行列 . . . . .	9
1.1.3 非零パターン . . . . .	10
1.2 行列の演算 . . . . .	12
1.2.1 和とスカラー倍 . . . . .	12
1.2.2 積 . . . . .	14
1.2.3 直 和 . . . . .	16
1.2.4 Kronecker 積 . . . . .	16
1.2.5 Hadamard 積 . . . . .	18
1.3 逆 行 列 . . . . .	19
1.3.1 定 義 . . . . .	19
1.3.2 ブロック行列の逆行列 . . . . .	20
1.4 転置と共役 . . . . .	25
1.4.1 定 義 . . . . .	25
1.4.2 対称行列と Hermite 行列 . . . . .	26
1.4.3 直交行列とユニタリ行列 . . . . .	27
1.5 ト レ ー ス . . . . .	28
1.6 ノ ル ム . . . . .	29
1.7 特 殊 な 行 列 . . . . .	34
1.7.1 優 対 角 行 列 . . . . .	34
1.7.2 巡回行列など . . . . .	35

<b>2 行列式</b>	<b>37</b>
2.1 置 換	37
2.2 行列式の定義	39
2.3 多重線形性	42
2.3.1 多重線形性と交代性	42
2.3.2 行列式の特徴づけ	45
2.4 諸 公 式	48
2.5 展 開 公 式	51
2.5.1 Laplace 展 開	51
2.5.2 一般化 Laplace 展開	54
2.5.3 Binet-Cauchy 展開	57
2.6 余 因 子	59
2.7 行列式の計算法	61
<b>3 基本変形と掃き出し</b>	<b>63</b>
3.1 行列の基本変形	63
3.1.1 行 基 本 変 形	63
3.1.2 列 基 本 変 形	66
3.2 階 数 標 準 形	67
3.3 既 約 階 段 形	72
3.4 逆行列の計算	75
<b>4 階 数</b>	<b>79</b>
4.1 階 数 の 定 義	79
4.1.1 小行列式による定義	79
4.1.2 列ベクトルによる定義	81
4.1.3 行ベクトルによる定義	84
4.1.4 定義の等価性	85
4.2 階数標準形と既約階段形の一意性	86
4.3 階 数 の 性 質	87
4.3.1 基 本 的 性 質	87
4.3.2 劣モジュラ性	91

4.4 階数の工学的意味	94
4.4.1 メカニズムの自由度	94
4.4.2 制御システムの可制御性	97
<b>5 線形方程式系</b>	<b>99</b>
5.1 解の存在と一意性	99
5.2 解のパラメータ表示	104
5.3 掃 き 出 し 法	105
5.4 Cramer の 公 式	107
5.5 微分方程式の差分近似から生じる方程式	108
5.6 Sylvester 方程式	111
5.7 Lyapunov 方程式	114
<b>6 固 有 値</b>	<b>117</b>
6.1 固有値と固有ベクトル	117
6.1.1 定 義	117
6.1.2 特 性 方 程 式	118
6.1.3 Gershgorin の定理	120
6.1.4 一般化固有値問題	124
6.2 固有値の工学的意味	124
6.2.1 線形ダイナミカルシステム	125
6.2.2 主 成 分 分 析	125
6.2.3 構造物の振動解析	126
6.2.4 Markov 連鎖の定常分布	126
6.3 対称行列の固有値	127
6.3.1 直交変換による対角化	127
6.3.2 最大最小定理	132
6.3.3 摂 動 定 理	135
6.4 Hermite 行列の固有値	136
6.4.1 ユニタリ変換による対角化	136
6.4.2 最大最小定理	138
6.4.3 摂 動 定 理	139

6.5	Schur 分 解 . . . . .	139
6.6	正 規 行 列 . . . . .	142
6.7	一般の行列の固有値 . . . . .	144
6.7.1	固 有 空 間 . . . . .	144
6.7.2	一般化固有空間 . . . . .	146
6.8	Jordan 標 準 形 . . . . .	150
6.8.1	定 理 . . . . .	150
6.8.2	構 成 法 . . . . .	153
6.8.3	一意性の証明 . . . . .	159
6.8.4	計 算 例 . . . . .	160
6.8.5	行列のべき乗 . . . . .	172
6.8.6	行列の指数関数 . . . . .	175
6.8.7	単因子との関係 . . . . .	179
<b>7</b>	<b>2 次 形 式 . . . . .</b>	<b>181</b>
7.1	2次形式の定義 . . . . .	181
7.2	対称行列の正定値性 . . . . .	181
7.2.1	定義と判定条件 . . . . .	181
7.2.2	性 質 . . . . .	186
7.3	Hermite 行列の正定値性 . . . . .	190
7.4	工学における正定値行列 . . . . .	192
7.4.1	確 率 変 数 . . . . .	192
7.4.2	構 造 力 学 . . . . .	194
7.4.3	微 分 方 程 式 . . . . .	201
7.4.4	回路とグラフ . . . . .	201
7.5	Sylvester の慣性則 . . . . .	205
7.5.1	対称行列の場合 . . . . .	205
7.5.2	Hermite 行列の場合 . . . . .	208
<b>8</b>	<b>特異値と最小 2 乗法 . . . . .</b>	<b>209</b>
8.1	特異値の定義 . . . . .	209
8.1.1	実行列の場合 . . . . .	209

8.1.2	複素行列の場合 . . . . .	211
8.2	特異値の性質 . . . . .	213
8.3	最 小 2 乗 法 . . . . .	216
<b>9</b>	<b>ベクトル空間 . . . . .</b>	<b>219</b>
9.1	ベクトル空間 . . . . .	219
9.1.1	定 義 . . . . .	219
9.1.2	諸 例 . . . . .	221
9.2	部 分 空 間 . . . . .	222
9.2.1	定 義 . . . . .	222
9.2.2	諸 例 . . . . .	224
9.2.3	部分空間の共通部分と和 . . . . .	224
9.2.4	補空間, 商空間 . . . . .	226
9.3	線形独立性, 線形従属性 . . . . .	227
9.4	基 底 . . . . .	228
9.4.1	定 義 . . . . .	228
9.4.2	諸 例 . . . . .	230
9.4.3	次元が関係する公式など . . . . .	233
9.4.4	座標と基底の取替え . . . . .	234
9.5	線 形 写 像 . . . . .	236
9.5.1	定 義 . . . . .	236
9.5.2	諸 例 . . . . .	237
9.5.3	行 列 表 現 . . . . .	239
9.5.4	線形写像の空間 . . . . .	242
9.5.5	不変部分空間 . . . . .	244
9.5.6	同 型 . . . . .	245
9.5.7	射 影 . . . . .	246
9.6	内 積 . . . . .	248
9.6.1	定 義 . . . . .	249
9.6.2	諸 例 . . . . .	250
9.6.3	正規直交基底 . . . . .	252
9.6.4	直 交 補 空 間 . . . . .	253

9.6.5	共 役 写 像 . . . . .	254
9.6.6	正 射 影 . . . . .	255
9.6.7	ノ ル ム 空 間 . . . . .	257
9.6.8	Hilbert 空 間 . . . . .	260
9.6.9	Banach 空 間 . . . . .	264
9.7	双 対 空 間 . . . . .	266
9.7.1	定 義 . . . . .	266
9.7.2	諸 例 . . . . .	267
9.7.3	双 対 基 底 . . . . .	268
9.7.4	第 2 双 対 空 間 . . . . .	271
9.7.5	零 化 空 間 . . . . .	272
9.7.6	双 対 写 像 . . . . .	272
9.8	行列の階数—ベクトル空間の観点から . . . . .	274
9.8.1	階 数 と 次 元 . . . . .	274
9.8.2	階数に関する不等式 . . . . .	277
9.9	マトロイド—線形独立性のもつ組合せ構造 . . . . .	279
参 考 文 献	. . . . .	283
お わ り に	. . . . .	287
索 引	. . . . .	289