

# 目 次

はじめに	1
<b>1 複素積分特論</b>	<b>3</b>
1.1 位相と位相空間	3
1.1.1 位 相	3
1.1.2 連続写像の同値関係	6
1.1.3 ループと基本群	7
1.1.4 ホモトピーとループの積	8
1.1.5 写像度または巻き数	11
1.2 閉曲線に関する点の指数と一般化された留数の定理	12
1.2.1 閉曲線に関する点の指数 (回転数)	12
1.2.2 Cauchy の積分公式の一般化	15
1.2.3 留数の定理の一般化	16
1.3 留数の定理の応用：偏角の原理および Rouché の定理	17
1.3.1 偏 角 の 原 理	19
1.3.2 Rouché の 定 理	21
<b>2 解析接続と Riemann 面</b>	<b>23</b>
2.1 一致の定理と鏡像の原理	23
2.1.1 一 致 の 定 理	23
2.1.2 鏡 像 の 原 理	25
2.2 解析接続と Riemann 面	26
2.2.1 解 析 接 続	26
2.2.2 1 価 性 定 理	28
2.2.3 Riemann 面	29
2.2.4 自 然 境 界	30

<b>3 有理型関数</b> . . . . .	<b>31</b>	5.3.2 Kummer の合流型超幾何関数の漸化式 . . . . .	93
3.1 有理型関数の部分分数展開と整関数の無限乗積表示 . . . . .	31	5.3.3 不確定特異点のまわりの解と漸近展開式 . . . . .	93
3.1.1 有理型関数の部分分数展開 . . . . .	31		
3.1.2 整関数の無限乗積表示 . . . . .	32		
3.2 $\Gamma$ 関数と $B$ 関数 . . . . .	34		
3.2.1 $\Gamma$ 関数とその解析接続 . . . . .	34		
3.2.2 $B$ 関数 . . . . .	38		
3.2.3 Stirling の公式と $\Gamma$ 関数の漸近展開 . . . . .	39		
<b>4 楕円積分と楕円関数</b> . . . . .	<b>43</b>		
4.1 楕円積分 . . . . .	43		
4.2 楕円関数 . . . . .	49		
4.2.1 2重周期 . . . . .	49		
4.2.2 楕円関数の定義 . . . . .	50		
4.2.3 楕円関数の基本的な性質 . . . . .	51		
4.2.4 Weierstrass の $\wp$ 関数 . . . . .	54		
4.2.5 Jacobi の楕円関数 $\operatorname{sn} w, \operatorname{cn} w, \operatorname{dn} w$ . . . . .	58		
<b>5 複素変数の常微分方程式</b> . . . . .	<b>63</b>		
5.1 微分方程式と級数解 . . . . .	63		
5.1.1 複素変数に対する $n$ 階線形常微分方程式 . . . . .	63		
5.1.2 正則点のまわりの級数解 . . . . .	64		
5.1.3 確定特異点のまわりの級数解 . . . . .	65		
5.1.4 確定特異点のまわりの解に対する Frobenius の方法 . . . . .	68		
5.1.5 無限遠点のまわりの級数解 . . . . .	73		
5.2 Riemann の $P$ 関数と Gauss の超幾何関数 . . . . .	75		
5.2.1 Fuchs 型微分方程式と Riemann の $P$ 関数 . . . . .	75		
5.2.2 Gauss の超幾何微分方程式と超幾何関数 . . . . .	79		
5.2.3 超幾何微分方程式の解の大局的性質 . . . . .	83		
5.2.4 超幾何関数の漸化式 . . . . .	90		
5.3 不確定特異点をもつ微分方程式：合流型関数 . . . . .	91		
5.3.1 Kummer の合流型超幾何微分方程式と合流型超幾何関数 . . . . .	91		
<b>6 直交多項式</b> . . . . .	<b>95</b>		
6.1 有限区間 $(a, b)$ での直交多項式 . . . . .	95		
6.1.1 直交多項式の定義 . . . . .	95		
6.1.2 内積の定義と直交多項式 $F_n(x)$ の直交性 . . . . .	96		
6.2 無限区間 $(a, \infty)$ での直交多項式 . . . . .	97		
6.2.1 直交多項式の定義 . . . . .	97		
6.2.2 内積の定義と多項式 $G_n(x)$ の直交性 . . . . .	98		
6.3 無限区間 $(-\infty, \infty)$ での直交多項式 . . . . .	99		
6.3.1 直交多項式の定義：Hermite 多項式 . . . . .	99		
6.3.2 内積の定義と Hermite 多項式 $H_n(x)$ の直交性 . . . . .	99		
6.4 直交多項式が満足する微分方程式 . . . . .	100		
<b>7 超幾何関数で書かれる諸関数</b> . . . . .	<b>103</b>		
7.1 物理学の問題：球対称な系における物理現象と偏微分方程式 . . . . .	103		
7.1.1 Laplace 演算子の 3次元極座標表示 . . . . .	103		
7.1.2 球面調和関数 . . . . .	105		
7.2 Legendre の微分方程式と Legendre 関数： $P$ 関数の例 . . . . .	108		
7.2.1 Legendre の微分方程式 . . . . .	108		
7.2.2 Legendre 関数 . . . . .	109		
7.2.3 Legendre 関数の漸化式 . . . . .	111		
7.3 Legendre 多項式 . . . . .	113		
7.3.1 第 1 種 Legendre 多項式 . . . . .	113		
7.3.2 第 2 種 Legendre 多項式 . . . . .	114		
7.3.3 Legendre 多項式の直交関係と規格化積分 . . . . .	115		
7.3.4 Legendre 多項式の母関数表示 . . . . .	116		
7.4 Legendre の陪関数と Legendre の陪多項式 . . . . .	118		
7.4.1 Legendre の陪微分方程式と Legendre の陪関数 . . . . .	118		
7.4.2 Legendre の陪関数の漸化式 . . . . .	120		
7.4.3 Legendre の陪多項式 . . . . .	121		

<b>8</b>	<b>合流型超幾何関数で書かれる諸関数</b>	<b>123</b>
8.1	Weber Hermite の微分方程式と Hermite 関数	123
8.1.1	物理の問題:調和振動子	123
8.1.2	Weber Hermite の微分方程式と級数解	123
8.1.3	Hermite 多項式	125
8.1.4	Hermite 多項式の直交性と規格化積分	127
8.1.5	Hermite 多項式の母関数	127
8.2	Laguerre の微分方程式と Laguerre 関数	127
8.2.1	物理の問題:水素原子	127
8.2.2	Laguerre の微分方程式あるいは陪微分方程式と級数解, 多項式解	129
8.2.3	Laguerre の陪多項式および多項式に関する直交性と規格化積分	130
8.2.4	Laguerre の多項式の母関数	130
8.3	Bessel の微分方程式と Bessel 関数	132
8.3.1	物理の問題:丸い太鼓(円形膜)の振動	132
8.3.2	Bessel の微分方程式と合流型超幾何関数による解の表現	133
8.3.3	整数次の Bessel 関数	134
8.3.4	半整数の Bessel 関数, 球 Bessel 関数	136
	<b>参 考 文 献</b>	<b>137</b>
	<b>お わ り に</b>	<b>139</b>
	<b>索 引</b>	<b>141</b>