

目次

| | | | |
|---------------------------------|-----------|--|--|
| 第 1 章 行列算 | 1 | | |
| 1.1 例から入門 | 1 | | |
| 1.2 行列の言葉 | 3 | | |
| 1.3 行列の相等 | 5 | | |
| 1.4 行列の和とスカラー倍 | 6 | | |
| 1.5 積 | 8 | | |
| 1.6 単位行列 | 13 | | |
| 1.7 分配則と積の結合則および拡大結合則 | 14 | | |
| 1.8 逆行列 | 15 | | |
| 1.9 積の逆行列は逆行列の逆順の積 | 17 | | |
| 1.10 転置 | 17 | | |
| 1.11 和, スカラー倍, 積および逆行列の転置 | 19 | | |
| 1.12 共役と共役転置 | 20 | | |
| 1.13 和, スカラー倍, 積および逆行列の共役, 共役転置 | 21 | | |
| 1.14 ブロック行列 | 22 | | |
| 1.15 ブロック行列の積 | 22 | | |
| 1.16 ブロック行列の転置 | 25 | | |
| 1.17 ブロック行列の和とスカラー倍 | 26 | | |
| 腕試し問題 | 26 | | |
| 第 2 章 ベクトル空間と線形写像 | 32 | | |
| 2.1 行列算総括 | 32 | | |
| 2.2 ベクトル空間の公理 | 35 | | |
| 2.3 簡単な結果 | 35 | | |
| 2.4 ベクトル空間の例 | 36 | | |
| 2.5 集合論から Part I ——写像—— | 38 | | |
| 2.6 線形写像 | 39 | | |
| 2.7 線形写像の例 | 40 | | |
| 2.8 1 次方程式 $Ax = b$ | 41 | | |
| 2.9 1 次結合 | 42 | | |
| 2.10 1 次独立性と 1 次従属性 | 43 | | |
| 2.11 線形代数の基本定理 | 45 | | |
| 2.12 部分空間 | 46 | | |
| 2.13 スパン | 47 | | |
| 2.14 線形写像の零空間 (核) と値域 | 48 | | |
| 2.15 基底 | 49 | | |
| 2.16 次元 | 50 | | |
| 2.17 基底に関する定理 | 50 | | |
| 2.18 線形写像の行列表現 | 52 | | |
| 2.19 座標変換と分解定理 | 55 | | |
| 2.20 集合論から Part II ——同値関係と同値類—— | 55 | | |
| 腕試し問題 | 58 | | |
| 第 3 章 線形代数の概要 | 59 | | |
| 3.1 同値分解 | 59 | | |
| 3.2 LDU 分解 | 60 | | |
| 3.3 行列式 | 61 | | |
| 3.4 内積 | 63 | | |
| 3.5 QR 分解 | 66 | | |
| 3.6 シュア分解 | 69 | | |
| 3.7 ジョルダン分解 | 71 | | |
| 3.8 特異値分解 | 75 | | |
| 3.9 CS 分解 | 77 | | |
| 3.10 ノルムと収束 | 78 | | |
| 3.11 演算子ノルム | 82 | | |
| 3.12 条件数 | 83 | | |
| 3.13 行列とグラフ | 84 | | |

| | | | |
|---|------------|--|------------|
| 3.14 注意事項 | 86 | 6.10 任意行（または列）のスカラー倍を他行（または他列）に加えても 行列式の値は変わらない | 126 |
| 第4章 同値分解と LDU 分解 Part I—導出 | 87 | 6.11 積の行列式は行列式の積に等しい | 127 |
| 4.1 同値分解 | 87 | 6.12 可逆性と行列式の非零性は同値である | 128 |
| 4.2 LDU 分解 | 88 | 6.13 行列式の特定の行または列による展開 | 129 |
| 4.3 ガウスの消去法による LDU 分解 Part I | 89 | 6.14 逆行列の公式 | 131 |
| 4.4 ガウスの消去法による LDU 分解 Part II | 91 | 6.15 クラメールの公式 | 132 |
| 4.5 階数の一意性 | 96 | 6.16 ラプラス展開 | 133 |
| 4.6 LDU 分解の一意性 | 97 | 6.17 ビネ・コーシー展開 | 136 |
| 腕試し問題 | 99 | 6.18 3 次行列式は平行六面体の符号付体積を表す | 138 |
| 第5章 同値分解と LDU 分解 Part II—応用 | 101 | 6.19 ベクトル積（外積） | 140 |
| 5.1 過少決定系は非零解を持つ（線形代数の基本定理） | 101 | 腕試し問題 | 142 |
| 5.2 過剰決定系は一般に可解でない | 102 | 第7章 内積 | 145 |
| 5.3 逆行列存在の必要十分条件 | 104 | 7.1 内積の公理 | 145 |
| 5.4 階数の特徴づけ | 106 | 7.2 正定値行列 | 146 |
| 5.5 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 型行列方程式の可解必要十分条件 | 107 | 7.3 内積の行列表現 | 147 |
| 5.6 値域と零空間 | 109 | 7.4 正規直交系に関する補題 | 148 |
| 5.7 階数の同値な定義 | 110 | 7.5 グラム・シュミット法 | 149 |
| 5.8 次元定理 | 111 | 7.6 直交補空間 | 152 |
| 5.9 LDU 分解の行列方程式解法への応用 | 112 | 7.7 コーシー・シュワルツの不等式と三角不等式 | 155 |
| 腕試し問題 | 113 | 7.8 平行四辺形の法則 | 157 |
| 第6章 行列式 | 116 | 腕試し問題 | 158 |
| 6.1 行列式の定義 | 116 | 第8章 シュア分解と QR 分解 Part I | 159 |
| 6.2 偶置換と奇置換 | 117 | 8.1 固有値と固有ベクトル | 159 |
| 6.3 置換に互換を行うと偶奇性が反転する | 118 | 8.2 固有値問題入門 | 162 |
| 6.4 定義式による行列式計算例 | 119 | 8.3 相似変換 | 163 |
| 6.5 ゼロ行またはゼロ列を持つ行列式の値は 0 に等しい | 122 | 8.4 ユニタリ行列, 反射行列 (ハウスホルダー行列) | 165 |
| 6.6 転置をとっても行列式の値は変わらない: $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$ | 122 | 8.5 QR 分解 | 166 |
| 6.7 行列式は各行, 各列について線形である (多重線形性) | 123 | 8.6 複素行列のシュア分解 | 168 |
| 6.8 相等しい 2 行また 2 列を持つ行列式の値は 0 に等しい | 124 | 8.7 実行列のシュア分解 | 170 |
| 6.9 2 行または 2 列を互換すると行列式の符号は反転する (交代性) | 125 | 8.8 エルミート行列はユニタリ相似変換によって実対角化できる | 172 |

| | | | |
|---|------------|-----------------------------|------------|
| 8.9 シュア分解により対角化可能な行列は正規行列である | 173 | 11.6 定係数線形微分方程式への応用 Part I | 245 |
| 8.10 2次形式 | 174 | 11.7 定係数線形微分方程式への応用 Part II | 246 |
| 8.11 ケイリー・ハミルトンの定理 | 178 | 腕試し問題 | 252 |
| 8.12 トレースと固有値局所化定理 | 179 | 第12章 特異値分解 | 257 |
| 腕試し問題 | 181 | 12.1 特異値分解定理 | 257 |
| 第9章 シュア分解とQR分解 Part II | 183 | 12.2 ベクトル2ノルム | 260 |
| 9.1 エルミート行列とレーリー商 | 183 | 12.3 ノルム空間 | 261 |
| 9.2 単調定理 | 184 | 12.4 行列ノルム (演算子2ノルム) | 262 |
| 9.3 分離定理 (コーシーの入れ子定理) | 187 | 12.5 演算子ノルムの性質 | 264 |
| 9.4 クーラン・フィッシャーの定理 | 189 | 12.6 階数分析への応用 | 266 |
| 9.5 ゲルシュゴーリンの定理 | 190 | 12.7 行列方程式への応用 | 269 |
| 9.6 連成振動解析 | 192 | 12.8 最小自乗法への応用 | 270 |
| 9.7 3つの重要不等式 | 196 | 腕試し問題 | 274 |
| 9.8 レーリー商と固有値近似 | 197 | 第13章 CS分解 | 276 |
| 9.9 2次直交行列の標準形 | 201 | 13.1 ページ・サンダース型 (P-S型) CS分解 | 276 |
| 9.10 3次直交行列の標準形 | 202 | 13.2 P-S型CS分解の証明 | 280 |
| 腕試し問題 | 207 | 13.3 $p \geq m \geq k$ の場合 | 285 |
| 第10章 ジョルダン分解 Part I | 213 | 13.4 正射影 | 288 |
| 10.1 ジョルダン分解の一般形 | 214 | 13.5 部分空間の間の距離 | 290 |
| 10.2 ジョルダン分解の構造 | 216 | 13.6 AB^{-1} 型行列の特異値分解 | 292 |
| 10.3 1次独立性に関する補題 | 220 | 腕試し問題 | 295 |
| 10.4 単一固有値を持つ行列のジョルダン分解 Part I | 222 | 第14章 ノルム | 298 |
| 10.5 単一固有値を持つ行列のジョルダン分解 Part II | 224 | 14.1 線形写像の有界性と連続性 | 298 |
| 10.6 異なる固有値を持つ行列のジョルダン分解 | 227 | 14.2 展開係数の有界性 | 300 |
| 腕試し問題 | 229 | 14.3 有限次元ノルム空間に関する3つの性質 | 302 |
| 第11章 ジョルダン分解 Part II | 233 | 14.4 有限次元ノルム空間上の線形写像 | 304 |
| 11.1 M 演算 | 233 | 14.5 演算子ノルム | 305 |
| 11.2 多項式 $P(\mathbf{A})$ | 235 | 14.6 演算子ノルムの性質 | 308 |
| 11.3 分数関数 $P(\mathbf{A})Q^{-1}(\mathbf{A})$ | 237 | 14.7 演算子ノルムの応用例 | 310 |
| 11.4 コーシーの積分公式 | 238 | 14.8 ハーン・バナハの定理 | 313 |
| 11.5 行列冪 (ベキ) 級数 | 241 | 14.9 ハーン・バナハの定理の応用例 | 318 |

| | |
|---------------------------------------|------------|
| 腕試し問題 | 320 |
| 第 15 章 行列とグラフ | 323 |
| 15.1 行列のグラフ | 323 |
| 15.2 強連結成分 | 323 |
| 15.3 頂点番号の付け替えは置換行列による相似変換に対応する | 325 |
| 15.4 強連結性と既約性は同値である | 325 |
| 15.5 グラフが強連結な優対角行列は可逆である | 326 |
| 15.6 行列方程式への応用 | 327 |
| 解 答 | 329 |
| 参考文献 | 357 |
| 索 引 | 360 |