

目 次

1. 正規分布の特性	1
1.1 特 性	1
1.2 $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dz = 1$ の証明	4
1.3 積率母関数 mgf, 特性関数 cf, キュミュラント母関数 cgf	6
1.4 歪度と尖度	10
1.5 平均まわりのモーメント	12
1.6 中位数と最頻値	13
1.7 グ ラ フ	13
1.8 確率計算の例	16
1.9 原点まわりのモーメントと平均まわりのモーメント	17
1.10 原点まわりのモーメントとキュミュラント	19
1.11 平均まわりのモーメントとキュミュラント	20
1.12 平均偏差のモーメント	21
1.13 正規分布の再生性	22
1.14 累積確率の値と近似計算	22
1.15 上側確率を与える分位点と近似計算	24
1.16 正規乱数の発生	26
1.17 パラメータ推定	28
2. 正規分布に関連する積分	29
2.1 不定積分	29
2.2 定積分	33

3. 中心極限定理とエッジワース展開	41
3.1 中心極限定理	41
3.1.1 リンドベルグ-レヴィの CLT	41
3.1.2 リンドベルグの CLT	47
3.1.3 有界な確率変数の CLT	51
3.1.4 リヤプノフの CLT	53
3.1.5 マルチンゲール差に対する CLT	54
3.1.6 移動平均過程の CLT	56
3.1.7 ARMA(p, q) 過程の CLT	58
3.1.8 m 従属確率過程の CLT	60
3.1.9 関数 CLT	60
3.1.10 格子分布の CLT (局所極限定理)	62
3.1.11 ベルンシュタイン-フェラーの定理	62
3.2 多変量中心極限定理	63
3.2.1 多変量リンドベルグ-レヴィ CLT	64
3.2.2 独立で有界な確率ベクトルに対する CLT	65
3.2.3 $\{X_n\}$ が独立でないときの CLT	67
3.3 正規分布への収束速度	67
3.3.1 iid の場合	67
3.3.2 独立であるが同一の分布ではない場合	68
3.3.3 X の 3 次モーメントの存在を仮定しない場合	69
3.3.4 独立の仮定もモーメントの存在も仮定しない場合	70
3.4 U 統計量の CLT	71
3.4.1 U 統計量	71
3.4.2 U 統計量の CLT	73
3.5 標本モーメントの漸近的正規性	75
3.5.1 原点まわりの標本モーメントの漸近的正規性	75
3.5.2 平均まわりの標本モーメントの漸近的正規性	77
3.5.3 確率変数の関数の漸近的正規性	78
3.5.4 確率ベクトルの関数の漸近的正規性	80
3.6 エッジワース展開	87

3.7	スチューデント化 U 統計量のエッジワース展開	94
3.8	コーニッシュ-フィッシャー展開	96
3.8.1	コーニッシュ-フィッシャー展開 (1)	96
3.8.2	コーニッシュ-フィッシャー展開 (2)	96
3.9	無限分解可能な分布	98
3.9.1	無限分解可能な分布	99
3.9.2	無限分解可能な分布の性質	103
3.9.3	正規分布へ収束するための条件	104
4.	確率分布の正規近似	106
4.1	2項分布の正規近似	106
4.1.1	CLT による解釈	106
4.1.2	2項確率の近似計算	106
4.1.3	累積2項確率の正規近似	109
4.2	ポアソン分布の正規近似	110
4.2.1	mgf による正規分布への収束の証明	110
4.2.2	累積ポアソン確率の正規近似	112
4.3	負の2項分布の正規近似	113
4.3.1	mgf による正規分布への収束の証明	113
4.3.2	累積負の2項確率の正規近似	115
4.4	ガンマ分布の正規近似	115
4.5	逆ガウス分布の正規近似	118
4.6	カイ2乗分布の正規近似	121
4.6.1	mgf による正規分布への収束の証明	121
4.6.2	カイ2乗分布の分位点の正規近似	122
4.7	非心カイ2乗分布の正規近似	124
4.7.1	mgf による正規分布への収束の証明	124
4.7.2	非心カイ2乗分布の分布関数の正規近似	125
4.7.3	非心カイ2乗分布の分位点の正規近似	126
4.8	t 分布および非心 t 分布の正規近似	128
4.8.1	t 分布の正規分布への収束	128

4.8.2	t 分布の分位点の正規近似	129
4.8.3	非心 t 分布の分位点の正規近似	129
4.9	F 分布の正規近似	133
4.9.1	F 分布の規準化正規分布による近似	133
4.9.2	F 分布の分位点の正規近似	134
5.	正規分布の歴史	136
5.1	ド・モアブルによる正規分布の発見	136
5.2	ラプラスの中心極限定理 (CLT)	141
5.3	誤差分布としての正規分布	146
5.4	ガウスの誤差分布	147
5.5	誤差分布の経験的妥当性	153
5.6	ハーゲンの根源誤差仮説	155
5.7	正規分布の社会現象への適用—ケトラー	157
5.8	正規分布の生物学への応用—ゴルトン	161
5.9	正規分布と心理学	164
5.10	セント・ペテルスブルグ学派による CLT	166
5.10.1	チェビシエフ	166
5.10.2	マルコフ	168
5.10.3	リヤプノフ	170
5.11	リンドベルグの CLT	172
5.12	レヴィの CLT, 無限分解可能な分布	173
6.	2 変量正規分布	182
6.1	2 変量正規分布の同時確率密度関数	182
6.2	等高線	183
6.3	同時積率母関数 mgf とモーメント	185
6.4	同時キュミュラント母関数 cgf	188
6.5	同時特性関数 cf	189
6.6	同時絶対モーメント	189
6.7	同時不完全モーメント	190

6.8	共分散, 相関係数と独立	191
6.9	正規変数の線形変換	192
6.10	周辺分布, 条件つき分布	193
6.10.1	周辺分布	193
6.10.2	条件つき分布	194
6.10.3	条件 $\{X_2 > \alpha\}$ のもとでの期待値と分散	195
6.11	3変量から2変量正規変数への変換	198
6.12	X_1/X_2 の分布	199
6.13	2変量正規変数の関数の分布	201
6.14	2変量正規分布に関する注意	204
6.15	パラメータ推定	210
7.	対数正規分布およびその他の変換	211
7.1	特性	211
7.2	グラフ	213
7.3	対数正規分布の分位点と標準正規分布の分位点の関係	215
7.4	対数正規変数の積も比も対数正規分布する	215
7.5	ブラック-ショールズ過程	216
7.6	次数 r の対数正規分布族	217
7.7	一般対数正規分布	218
7.8	3パラメータ対数正規分布	219
7.9	対数正規乱数の発生	220
7.10	多変量対数正規分布	220
7.11	2変量対数正規分布	221
7.12	パラメータ推定	225
7.13	逆正規分布	225
7.14	バーンバーム-サンダース分布	227
8.	特殊な正規分布	230
8.1	切断正規分布	230
8.1.1	特性	230

8.1.2	単一切断正規分布	231
8.1.3	半正規分布	233
8.1.4	グ ラ フ	233
8.1.5	パラメータ推定	233
8.2	切断 2 変量正規分布	234
8.2.1	pdf と mgf	234
8.2.2	X_1 の pdf	235
8.2.3	グ ラ フ	235
8.2.4	パラメータ推定	235
8.2.5	単一切断 2 変量正規分布の期待値と分散	239
8.3	折り返し正規分布および半正規分布	239
8.3.1	特 性	240
8.3.2	折り返し正規分布および半正規分布のグラフ	242
8.4	次数 r の正規分布族	242
8.4.1	特 性	242
8.4.2	グ ラ フ	244
8.5	2 変量半正規分布	244
8.6	ベキ正規分布	246
8.7	非対称正規分布	247
8.7.1	特 性	247
8.7.2	性 質	248
8.7.3	非対称正規分布を発生させるモデル	248
8.7.4	グ ラ フ	249
8.7.5	パラメータ推定	249
8.7.6	$SN(\lambda)$ の一般化	250
8.8	p 変量非対称正規分布	252
8.8.1	特 性	252
8.8.2	2 変量非対称正規分布	254
8.8.3	条件つき分布	260
8.9	正規分布との混合分布	262
8.9.1	確率分布の混合	262

8.9.2	ϵ -汚染正規分布	264
8.9.3	正規・ロジスティック混合分布	265
8.9.4	正規・ラプラス混合分布	266
8.9.5	ベータ・正規分布	268
8.9.6	確率密度関数をウエイトとする混合	270

9.	正規母集団からの標本分布	273
9.1	カイ 2 乗分布	273
9.1.1	特 性	273
9.1.2	カイ 2 乗分布の再生性	275
9.1.3	\bar{X} と $(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$ は独立	275
9.1.4	S^2 の分布と特性	277
9.1.5	標本平均と標本分散の独立性の条件	278
9.1.6	グ ラ フ	279
9.1.7	独立な 2 つの正規母集団からの標本分散とカイ 2 乗分布	279
9.1.8	重回帰モデルの誤差分散の推定量	279
9.1.9	カイ 2 乗分布の正規近似	281
9.2	標本標準偏差 S の分布	281
9.3	S^2 と S の漸近的分布	283
9.4	非心カイ 2 乗分布	284
9.4.1	特 性	284
9.4.2	グ ラ フ	286
9.4.3	非心カイ 2 乗分布の一般化	287
9.4.4	正規確率変数の 2 次形式の分布	288
9.4.5	正規母集団からの標本平均ベクトルの 2 次形式の分布	288
9.4.6	非心カイ 2 乗分布の再生性	288
9.4.7	非心カイ 2 乗分布は m (自由度) と δ (非心度) の減少関数である	288
9.4.8	非心カイ 2 乗分布と正規分布	289
9.5	スチューデントの t 分布	289
9.5.1	特 性	289

9.5.2	グ ラ フ	293
9.5.3	正規母集団からの標本平均の分布と t 分布	293
9.5.4	正規母集団からの標本平均の差の分布	295
9.5.5	回帰係数の最小 2 乗推定量と t 分布	297
9.5.6	t 分布と規準正規分布	297
9.6	非心 t 分布	299
9.6.1	特 性	300
9.6.2	グ ラ フ	302
9.6.3	非心 t 分布の正規近似	303
9.6.4	非心 t 分布を用いる検定力の計算	305
9.7	F 分 布	307
9.7.1	特 性	307
9.7.2	正規分布からの標本分散比は F 分布をする	310
9.7.3	グ ラ フ	311
9.7.4	F 分布の正規近似	311
9.7.5	重回帰モデルにおける F 分布の応用	311
9.8	非心 F 分布	313
9.8.1	特 性	314
9.8.2	グ ラ フ	315
9.8.3	分布関数の正規近似	316
9.8.4	重回帰モデルにおける非心 F 分布の応用	316
9.9	標本平均偏差の分布	317
9.10	ギアリーの a	318
9.11	標 本 歪 度	320
9.12	標 本 尖 度	323
9.13	標本変動係数	325
9.14	2 変量正規分布からの標本平均の分布	327
9.15	処理効果の大きさ	328
9.16	標本相関係数	328
9.16.1	フィッシャーの r の分布	329
9.16.2	ホテリングの r の分布	330

9.16.3	クラメールの r の分布	331
9.16.4	フィッシャーの Z 変換	331
9.16.5	$\rho \neq 0$ の場合の r の分布	333
9.16.6	r のモーメント	334
10.	正規母集団からの標本順序統計量	336
10.1	順序統計量の cdf	336
10.2	順序統計量の pdf	337
10.3	$X_{(r)}$ と $X_{(s)}$ の同時 cdf と pdf	338
10.4	順序統計量と \bar{X} および S との関係	340
10.5	順序統計量の期待値と分散	341
10.6	$N(0, 1)$ からの最大値のモーメント	343
10.7	標本中位数および四分位数	343
10.7.1	標本中位数の pdf	343
10.7.2	標本中位数の期待値, 分散, 尖度および \bar{X} との効率	344
10.7.3	四分位数	346
10.8	標本範囲の分布, 期待値および分散	347
10.8.1	cdf と pdf	347
10.8.2	期待値と分散	348
10.9	スチューデント化範囲	349
10.10	標本分位点	351
10.10.1	漸近的正規性	351
10.10.2	正規母集団からの $X_{(m+1)}$ の分布	352
10.10.3	標本分位点の同時 pdf の漸近的正規性	352
10.10.4	$X_{(m)}$ のモーメント	354
10.10.5	ξ_p の $(1-\alpha) \times 100\%$ 信頼区間	354
10.11	ランキット	354
10.11.1	ランキット	354
10.11.2	正規確率プロット	356
10.12	削除平均	358
10.12.1	削除平均と漸近的正規性	358

10.12.2 削除平均の漸近的効率 359

11. 多変量正規分布	362
11.1 特 性	362
11.2 共分散 0 は独立を意味する	366
11.3 \boldsymbol{x} の分割と独立	366
11.4 条件つき分布	368
11.5 mgf とモーメント	369
11.6 正規変数の線形関数の独立	370
11.7 ダルムア-スキトヴィッチの定理	372
11.8 正規変数の 2 次形式の分布	373
11.9 1 次関数と 2 次形式および 2 つの 2 次形式の独立	377
11.10 多変量正規分布からの標本分布	379
11.10.1 線形結合	379
11.10.2 $\bar{\boldsymbol{x}}$ の分布	379
11.10.3 カイ 2 乗分布	380
11.10.4 $\bar{\boldsymbol{x}}$ と \boldsymbol{S} の独立	380
11.11 ウィッシュャート分布	382
11.11.1 特 性	382
11.11.2 ウィッシュャート分布はカイ 2 乗分布の拡張である	383
11.11.3 ウィッシュャート分布の多変量ガンマ関数による表示	383
11.11.4 正規分布からの標本偏差平方和行列はウィッシュャート分布を する	384
11.11.5 正規分布からの標本分散共分散行列はウィッシュャート分布を する	384
11.11.6 ウィッシュャート分布は再生性をもつ	384
11.11.7 分割行列とウィッシュャート分布	384
11.11.8 非特異行列をかけた行列もウィッシュャート分布をする	385
11.11.9 逆行列とウィッシュャート分布	386
11.11.10 ウィッシュャート変数の行列式	387
11.11.11 逆ウィッシュャート分布	387

11.11.12	非心ウィッシュャート分布	387
11.12	ホテリングの T^2	388
11.13	多変量 t 分布.....	393
11.13.1	特性	393
11.13.2	線形変換	396
11.13.3	直積モーメント	396
11.13.4	周辺分布	397
11.13.5	条件つき分布	398
11.13.6	多変量 t 分布と t 分布, F 分布	400
11.13.7	回帰モデル	400
11.14	多変量中心極限定理.....	402
12.	パラメータの点推定.....	404
12.1	$X_i \sim \text{NID}(\mu, \sigma^2)$ の μ , σ^2 および σ の推定	404
12.2	推定量の特性	409
12.2.1	\bar{X} の特性	409
12.2.2	$\hat{\sigma}^2$ の特性	413
12.2.3	S , $\hat{\sigma}$ の特性, σ の不偏推定量	414
12.3	μ^k の MVUE	419
12.4	クラメール-ラオ限界からバタチャリヤ限界へ.....	420
12.5	$X \sim N(\mu, V(\mu))$ の μ の MLE	421
12.6	SBVN(ρ) の ρ の MLE	423
12.7	BVN($\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$) のパラメータの MLE	425
12.8	多変量正規分布のパラメータ推定	429
12.9	パラメータの関数のクラメール-ラオの不等式.....	433
12.10	対数正規分布の μ_X の推定	434
12.11	対数正規分布の μ_X , σ_X^2 の MLE の漸近的分布	436
12.12	正規線形回帰モデルのパラメータ推定.....	439
12.12.1	最小2乗法による β の推定と σ^2 の不偏推定	440
12.12.2	$\hat{\beta}$ および s^2 の特性	442
12.12.3	最尤法による β と σ^2 の推定	448

12.12.4	プロフィール尤度関数	451
12.12.5	決定係数	455
12.12.6	プロビットモデルの推定	456
13.	信頼区間と許容区間	468
13.1	2項分布の p —— 正規近似	468
13.2	μ の信頼区間	469
13.2.1	σ 既知のとき	469
13.2.2	σ 未知, 大標本のとき	469
13.2.3	σ 未知, 小標本のとき	470
13.3	$\mu_1 - \mu_2$ の信頼区間	472
13.4	対 比 較	475
13.5	σ^2 の信頼区間	481
13.6	σ_2^2 / σ_1^2 の信頼区間	481
13.7	(μ, σ^2) の信頼域	482
13.8	ρ の信頼区間	483
13.9	多変量正規分布のパラメータの信頼域	485
13.9.1	μ の信頼域	487
13.9.2	$\mathbf{a}'\mu$ の信頼区間	489
13.9.3	$\mathbf{a}'\mu$ の T^2 同時信頼区間	490
13.9.4	ボンフェローニの同時信頼区間	492
13.10	多変量対比較の信頼域	497
13.11	$\mathbf{C}\mu$ に対する信頼域	502
13.12	正規線形回帰モデルのパラメータの信頼区間	507
13.12.1	β の信頼域	508
13.12.2	σ^2 の信頼区間	512
13.12.3	$\mathbf{R}\beta = \mathbf{r}$ の信頼域	513
13.13	予 測 区 間	515
13.14	許容区間と許容限界	518
13.14.1	片側許容区間	518
13.14.2	両側許容区間	522

13.14.3	両すそが等しい許容区間	529
13.14.4	β 期待両側許容区間	532
13.14.5	回帰モデルの片側許容区間	534
13.14.6	回帰モデルの両側許容区間	538
14.	仮 説 検 定	541
14.1	仮説の設定	542
14.2	検定統計量とその分布の決定	543
14.3	有意水準と棄却域の決定	543
14.4	検定方式の確認	546
14.4.1	検定統計量の値が棄却域に落ちたとき	547
14.4.2	検定統計量の値が棄却域に落ちないとき	548
14.5	検定を実施し、結論を述べる	553
14.6	両側検定の場合	553
14.7	2項分布の p —— 正規近似	555
14.8	2項分布の $p_1 - p_2$ —— 正規近似	556
14.9	μ に関する検定	557
14.10	$\mu_1 - \mu_2$ に関する検定	561
14.11	対 比 較	572
14.12	σ^2 に関する検定	575
14.13	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ の検定	578
14.14	非正規分布のもとでの F 検定の $P(I)$	582
14.15	相関係数に関する検定	584
14.15.1	$\rho = 0$ の検定	584
14.15.2	$\rho_1 = \rho_2$ の検定	585
14.16	多変量正規分布に関する仮説検定	586
14.16.1	μ に関する検定	586
14.16.2	多変量対比較	586
14.16.3	$C\mu$ に関する仮説検定	587
14.17	正規線形回帰モデルにおける仮説検定	587
14.17.1	β に関する仮説検定	587

14.17.2	$\alpha'\beta$ に関する仮説検定	588
14.17.3	$R\beta=r$ の検定	589
14.18	許容限界に関する仮説検定	594
15.	正規性の検定	600
15.1	正規確率プロット	600
15.2	歪度と尖度を用いる正規性の検定	612
15.3	ギアリー検定	617
15.4	範囲テスト	620
15.5	シャピロ-ウィルク検定	621
15.5.1	シャピロ-ウィルク検定	621
15.5.2	W の性質	624
15.5.3	W の計算	626
15.5.4	W のパーセント点および W から標準正規変数への変換	629
15.6	ダゴスティーノの D	632
15.7	$P(I)$ および検定力の比較	637
15.8	正規線形回帰モデルにおける正規性検定	641
参 考 文 献		649
付 表		659
付表 1	標準正規分布 (上側確率)	661
付表 2	t 分布	662
付表 3	χ^2 分布	663
付表 4	F 分布 (1% 点)	664
付表 5	F 分布 (5% 点)	665
索 引		667

