# 目　次


**第 1 章　ニュートン力学** **1**

1.1　運動の概念 . . . . . 1

1.2　力の概念と例 . . . . . 6

1.3　ニュートンの運動方程式 . . . . . 15

1.4　状態，相空間，因果律 . . . . . 18

1.5　接バンドルとしての状態空間 . . . . . 20

1.6　2 点系 . . . . . 23

1.7　$N$ 点系 . . . . . 28

1.8　運動方程式からの一般的帰結 . . . . . 32

1.8.1　運動量の定理 . . . . . 32

1.8.2　エネルギーの定理 . . . . . 33

1.8.3　力学的エネルギー保存則 . . . . . 35

1.9　多体系における保存則 . . . . . 39

1.9.1　全運動量保存則 . . . . . 39

1.9.2　エネルギー保存則 . . . . . 40

1.10　角運動量 . . . . . 41

1.11　面積速度 . . . . . 46

1.12　多体系における角運動量保存則 . . . . . 48

1.13　万有引力による運動——惑星の運動への応用 . . . . . 50

1.14　物理量と保存量の一般概念 . . . . . 56

1.15　ニュートン力学における対称性 . . . . . 59

1.15.1 対称性 . . . . . 60
1.15.2 ニュートン方程式の対称性 . . . . . 61
1.15.3 時間並進対称性 . . . . . 62
1.15.4 時間反転対称性 . . . . . 64
1.15.5 空間操作に関する対称性 . . . . . 66
1.15.6 空間反転対称性 . . . . . 69
1.15.7 広義回転対称性 . . . . . 70
1.16 ニュートン力学的時間と空間の源 . . . . . 71
1.16.1 抽象アファイン空間からの時間間隔と空間の分節 . . 72
1.16.2 ガリレイ時空 . . . . . 73
1.16.3 基準ベクトル空間の直和分解と定理 1.62 の証明 . . . 77
1.16.4 ガリレイ座標変換 . . . . . 79
1.17 ニュートン方程式のガリレイ不変性 . . . . . 80

**第 2 章 変分原理とラグランジュ形式 83**
2.1 数学的準備 . . . . . 83
2.1.1 曲線の空間 . . . . . 83
2.1.2 変分法の基本補題 . . . . . 85
2.1.3 汎関数 . . . . . 87
2.2 汎関数の変分 . . . . . 90
2.3 変分原理 . . . . . 93
2.4 ラグランジュ関数に同伴する保存量 . . . . . 97
2.5 オイラー–ラグランジュ方程式の座標表示 . . . . . 98
2.6 オイラー–ラグランジュ方程式としてのニュートンの運動方程式 . . . . . 101
2.7 停留曲線が極小曲線となる十分条件 . . . . . 106
2.8 循環座標と保存則 . . . . . 113
2.9 オイラー–ラグランジュ方程式の拡張 . . . . . 114
2.10 対称性と保存則 . . . . . 115
2.10.1 応用 1：ポテンシャルの空間並進対称性と全運動量保存則 . . . . . 118



2.10.2 応用 2：ポテンシャルの広義回転対称性と軌道角運動量保存則 . . . . . 119
2.11 拘束系 . . . . . 121

**第 3 章 力学のハミルトン形式 133**
3.1 1 点系におけるハミルトニアンとハミルトン方程式 . . . . . 133
3.2 ハミルトン方程式の一般化 (I) . . . . . 136
3.3 ハミルトン相流 . . . . . 137
3.4 自励系における体積の時間変化 . . . . . 140
3.5 リウヴィルの定理と再帰定理 . . . . . 145
3.6 ハミルトン方程式の一般化 (II) . . . . . 148
3.7 ラグランジュ形式との関連 . . . . . 149
3.7.1 ハミルトン関数 . . . . . 149
3.7.2 ラグランジュ方程式とハミルトン方程式の関係 . . . . 151
3.8 $N$ 体系のハミルトン方程式の単一化と余接バンドル . . . . . 154
3.8.1 双対空間の元としての一般化運動量 . . . . . 154
3.8.2 新しいハミルトニアンによる運動方程式 . . . . . 156
3.8.3 運動方程式の単一化 . . . . . 157
3.8.4 余接バンドルとしての状態空間 . . . . . 160
3.9 ハミルトン形式の普遍的定式化 . . . . . 161
3.9.1 シンプレクティックベクトル空間 . . . . . 162
3.9.2 シンプレクティック同型 . . . . . 169
3.9.3 一般ハミルトン方程式 . . . . . 171
3.9.4 物理量の運動方程式——ポアソン括弧 . . . . . 174
3.10 シンプレクティック対称性 . . . . . 176

**第 4 章 特殊相対性理論 181**
4.1 ミンコフスキー空間 . . . . . 181
4.2 ミンコフスキー基底とローレンツ行列 . . . . . 184
4.3 線形座標系とローレンツ座標系 . . . . . 187
4.3.1 線形座標系 . . . . . 187
4.3.2 ローレンツ座標系 . . . . . 188

4.4 特殊相対性理論における時間と空間の発現 . . . . . 189
4.5 ベクトルの分類 . . . . . 193
4.6 時間的ベクトルの基本的性質 . . . . . 197
4.7 分解定理 . . . . . 199
4.8 ローレンツ写像群 . . . . . 200
4.8.1 ローレンツ写像 . . . . . 200
4.8.2 ローレンツ対称性 . . . . . 202
4.8.3 ローレンツ群との関係 . . . . . 205
4.8.4 ローレンツ写像群と時間的ベクトル . . . . . 206
4.8.5 ポアンカレ変換群 . . . . . 207
4.8.6 ポアンカレ不変量 . . . . . 208
4.9 ミンコフスキー時空における質点の運動 . . . . . 209
4.10 時間的運動と固有時 . . . . . 210
4.11 ローレンツ座標系での表示 . . . . . 215
4.12 時計の遅れ . . . . . 220
4.13 運動方程式 . . . . . 222
4.14 エネルギーの現れと非相対論的極限 . . . . . 229
4.15 静止座標系 . . . . . 233
4.16 多体系における全 $(d+1)$ 次元運動量保存則 . . . . . 234
4.17 $(d+1)$ 次元的力場の一つのクラスと運動方程式 . . . . . 236
4.17.1 $(d+1)$ 次元的力の一つのクラス . . . . . 236
4.17.2 ベクトル場から定まる $(d+1)$ 次元的力場と運動方程式 . . . . . 237
4.17.3 方向エネルギー運動量保存則 . . . . . 239
4.17.4 運動方程式のローレンツ座標系での表示 . . . . . 241
4.18 変分原理 . . . . . 243
4.19 変分原理のローレンツ座標系での表示 . . . . . 245
4.20 固有時反転と負のエネルギー . . . . . 247
4.21 光的運動と空間的運動 . . . . . 249
4.21.1 光的運動——光的粒子 . . . . . 250
4.21.2 空間的運動——虚粒子 . . . . . 252



**第 5 章 古典電磁気学 255**
5.1 はじめに . . . . . 255
5.2 電磁ポテンシャルと古典電磁気学の基礎方程式 . . . . . 257
5.3 ローレンツ座標系での基礎方程式の表示 . . . . . 260
5.4 電磁ポテンシャルに対する方程式の解 . . . . . 265
5.5 電磁場テンソル . . . . . 267
5.6 電場と磁場の発現およびマクスウェル方程式の導出 . . . . . 269
5.7 電場と磁場からつくられるスカラー不変量 . . . . . 274
5.8 電磁場と相互作用する荷電粒子の運動方程式 . . . . . 275
5.8.1 座標から自由な形式 . . . . . 276
5.8.2 固有時反転と反粒子 . . . . . 277
5.8.3 座標表示 . . . . . 278
5.9 変分原理 . . . . . 279
5.10 ゲージ対称性 . . . . . 280
5.11 ゲージ条件 . . . . . 284
5.11.1 ローレンツ条件再訪 . . . . . 285
5.11.2 クーロン条件 . . . . . 285
5.12 荷電粒子と電磁場の相互作用系 . . . . . 287

**第 6 章 古典場の理論 289**
6.1 はじめに . . . . . 289
6.2 古典場の統一的記述形式 . . . . . 290
6.3 変分原理 (I)——実場の場合 . . . . . 292
6.4 変分原理 (II)——複素場の場合 . . . . . 303
6.5 場の共役運動量とハミルトニアン . . . . . 318
6.5.1 実場の場合 . . . . . 318
6.5.2 複素場の場合 . . . . . 322
6.6 対称性と保存則 . . . . . 325
6.6.1 U(1) 対称性と保存則 . . . . . 325
6.6.2 ラグランジュ密度関数の並進共変性とエネルギー・運動量保存則 . . . . . 331

6.7 複素場と電磁場の相互作用——ゲージ場の理論 . . . . . 334

**第 7 章 量子力学 345**

7.1 はじめに . . . . . 345
7.2 量子力学の公理系 . . . . . 346
7.2.1 量子的状態 . . . . . 346
7.2.2 物理量 . . . . . 351
7.2.3 確率解釈 . . . . . 357
7.2.4 状態の「時間発展」 . . . . . 363
7.2.5 物理量の「時間発展」と量子力学的保存量 . . . . . 367
7.3 物理量の非可換性と不確定性関係 . . . . . 369
7.4 複数の物理量の測定に関する公理 . . . . . 373
7.5 量子系の自由度——有限自由度と無限自由度 . . . . . 377
7.6 正準交換関係の表現 . . . . . 378
7.7 角運動量代数 . . . . . 390
7.8 ハミルトニアンの固有値問題が正確に解ける例：量子調和振動子 . . . . . 394
7.9 CCR の表現に関する同値性の概念 . . . . . 397
7.10 CCR の直和表現，可約性，既約性 . . . . . 399
7.11 CCR のヴァイル表現 . . . . . 400
7.12 スピン角運動量と内部自由度 . . . . . 403
7.13 合成系の状態空間と物理量 . . . . . 408
7.14 同種の量子的粒子の不可弁別性と統計性 . . . . . 411
7.15 無限粒子系 . . . . . 417
7.16 ハミルトニアンの一般的特性 . . . . . 419
7.16.1 最低エネルギーに関する変分原理 . . . . . 419
7.16.2 「時間発展」における遷移確率の評価と量子ゼノン効果 . . . . . 420
7.17 代数的定式化 . . . . . 425

**付録 A 写像と同値関係 433**

A.1 写像の全単射性に関する条件 . . . . . 433



A.2 同値関係と同値類 . . . . . 434

**付録 B 代数的構造 437**

B.1 群 . . . . . 437
B.2 変換群 . . . . . 439
B.3 リー代数 . . . . . 439
B.4 結合的代数 . . . . . 442

**付録 C ベクトル空間とアファイン空間 445**

C.1 基底と線形座標系 . . . . . 445
C.2 基底の変換と座標変換 . . . . . 446
C.3 線形作用素 . . . . . 447
C.4 線形作用素の行列表示 . . . . . 447
C.5 ベクトル空間の同型 . . . . . 448
C.6 トレースと行列式 . . . . . 449
C.7 固有値と固有ベクトル . . . . . 449
C.8 双対空間 . . . . . 449
C.9 アファイン空間 . . . . . 451
C.9.1 定義と例 . . . . . 451
C.9.2 部分アファイン空間 . . . . . 452
C.9.3 アファイン空間の同型 . . . . . 453

**付録 D 計量ベクトル空間と計量アファイン空間 455**

D.1 ベクトル空間の計量 . . . . . 455
D.2 計量ベクトル空間の同型 . . . . . 458
D.3 直交系 . . . . . 458
D.4 計量ベクトル空間の直和 . . . . . 460
D.5 計量アファイン空間 . . . . . 460
D.6 表現定理 . . . . . 461
D.7 有限次元計量ベクトル空間における共役作用素 . . . . . 462
D.8 ヒルベルト空間 . . . . . 463
D.8.1 内積空間のノルムに関する性質 . . . . . 463

D.8.2 点列の収束と極限 . . . . . 463
D.8.3 コーシー列とヒルベルト空間 . . . . . 464
D.8.4 開集合と閉集合 . . . . . 464
D.8.5 完備化 . . . . . 465
D.9 ベクトル場の連続性 . . . . . 466
D.10 有限次元の不定計量ベクトル空間の位相 . . . . . 466

**付録 E ベクトル解析 467**
E.1 曲線 . . . . . 467
E.2 曲線の積分 . . . . . 469
E.3 曲線の長さ . . . . . 470
E.4 スカラー場 . . . . . 470
E.4.1 微分形式 . . . . . 470
E.4.2 勾配ベクトル . . . . . 472
E.4.3 合成写像の微分 . . . . . 473
E.5 ベクトル場，発散，ラプラシアン . . . . . 474
E.5.1 ベクトル場の微分 . . . . . 474
E.5.2 発散とラプラシアン . . . . . 475
E.6 無発散ベクトル場と保存則 . . . . . 476
E.7 有限次元実内積空間における積分 . . . . . 478

**付録 F テンソル積 481**
F.1 定義 . . . . . 481
F.2 対称テンソルと反対称テンソル . . . . . 482
F.3 反対称的内部積 . . . . . 483
F.4 行列式の本質的特徴づけ . . . . . 484
F.5 ベクトル空間の向き . . . . . 484
F.6 テンソル空間の計量 . . . . . 485
F.7 ホッジのスター作用素 . . . . . 485
F.8 3 次元ユークリッドベクトル空間におけるベクトル積と回転 . 486
F.8.1 ベクトル積 . . . . . 486
F.8.2 回転 . . . . . 487



F.9 外積の微分法 . . . . . 487

**付録 G 微分形式の理論 489**
G.1 微分形式と外微分作用素 . . . . . 489
G.2 微分形式に同伴する反対称反変テンソル場 . . . . . 491
G.3 余微分作用素 . . . . . 492
G.4 ラプラス–ベルトラミ作用素 . . . . . 493

**付録 H ポアソン方程式と非斉次波動方程式 495**
H.1 ポアソン方程式 . . . . . 495
H.2 非斉次波動方程式 . . . . . 498

**付録 I ヒルベルト空間における線形作用素 503**
I.1 線形作用素 . . . . . 503
I.2 拡大と閉作用素 . . . . . 506
I.3 レゾルヴェントとスペクトル . . . . . 507
I.4 共役作用素 . . . . . 508
I.5 対称作用素と自己共役作用素 . . . . . 508
I.6 スペクトル測度，作用素解析，スペクトル定理 . . . . . 510
I.6.1 スペクトル測度 . . . . . 510
I.6.2 作用素解析 . . . . . 511
I.6.3 スペクトル定理 . . . . . 512
I.7 自己共役作用素の強可換性 . . . . . 512

**索 引 515**