

# 目次

<b>第 I 部 確率論の基本事項 (渡辺 信三)</b>	<b>1</b>
<b>第 1 章 確率論の歴史</b>	<b>3</b>
<b>第 2 章 確率空間と確率変数</b>	<b>9</b>
2.1 確率空間 . . . . .	9
2.2 確率変数 . . . . .	11
2.2.1 一般的定義 . . . . .	11
2.2.2 実 ( $d$ -次元) 確率変数, 期待値, 分散, 共分散, 特性関数 . . . . .	12
2.2.3 確率変数系とその有限次元同時分布の系 . . . . .	16
2.3 条件付平均と条件付確率, 独立性 . . . . .	19
2.3.1 古典的定義 . . . . .	19
2.3.2 統計的独立性 . . . . .	20
2.3.3 部分 $\sigma$ -集合体による条件付期待値 . . . . .	22
2.3.4 確率変数による条件付期待値 . . . . .	24
2.3.5 正則条件付確率分布 . . . . .	25
2.3.6 対称ないし交換可能確率変数列 . . . . .	27
2.4 $d$ -次元確率分布の具体例 . . . . .	30
2.4.1 1 次元離散分布 . . . . .	30
2.4.2 1 次元連続特異分布 . . . . .	32
2.4.3 1 次元絶対連続分布 . . . . .	33
2.4.4 多次元 ( $d$ -次元) 分布 . . . . .	36
2.5 確率変数列と確率分布列の収束 . . . . .	38
2.6 独立確率変数の和の極限定理 . . . . .	41
<b>第 3 章 確率過程に関する基本事項</b>	<b>45</b>
3.1 確率過程とその見本関数 . . . . .	45
3.2 確率超過程, 正則化定理 . . . . .	49

<b>第 II 部 主要テーマ</b>	<b>55</b>
<b>第 1 章 ブラウン運動 (池田 信行・谷口 説男・松本 裕行)</b>	<b>57</b>
1.1 ウィナー以前のブラウン運動	57
1.2 ブラウン運動	60
1.2.1 経路空間, 連続な確率過程	60
1.2.2 ウィナー測度	61
1.2.3 ブラウン運動	62
1.3 ブラウン運動とフーリエ展開	63
1.3.1 カメロン-マルチン空間の正規直交基底による展開	63
1.3.2 具体例	64
1.4 道の性質	65
1.4.1 道の微分不可能性, 全変動, 2 次変動	66
1.4.2 不変性	66
1.4.3 ブルーメンタールの 0-1 法則	66
1.4.4 道の連続性, 重複対数の法則	67
1.4.5 再帰性	67
1.4.6 多重点	68
1.5 種々のウィナー汎関数の分布	68
1.5.1 1 次元ブラウン運動の到達時間の分布	68
1.5.2 ベッセル過程	70
1.5.3 局所時間	72
1.5.4 エクスカーション	76
1.5.5 2 次元ブラウン運動	77
1.6 ブラウン運動と確率積分	77
1.6.1 確率積分, 伊藤の公式	78
1.6.2 マルチンゲールの表現定理	80
1.6.3 多重ウィナー積分, ウィナー-伊藤展開	81
1.7 マルコフ過程としてのブラウン運動	82
1.7.1 マルコフ性	82
1.7.2 ファインマン-カツツの公式	84
1.7.3 ポテンシャル核	85
1.7.4 境界値問題	87
1.7.5 加法的汎関数 I	90
1.7.6 加法的汎関数 II	91
1.8 ウィナー空間における変数変換	92
1.9 ブラウン運動と同じ到達確率を持つ拡散過程	94
1.10 2 次ウィナー汎関数	96
1.10.1 無限次元行列式による表示	97
1.10.2 ヴァン・ヴェルクの公式	98
1.10.3 調和振動子	99
1.10.4 Lévy の確率面積	100
1.10.5 オイラー多項式, ベルヌーイ多項式	102
1.11 その他	103

1.11.1 ブラウン運動と白色雑音	103
1.11.2 ブラウン運動と呼ばれる様々な確率過程	104
1.11.3 ラフパス	105
1.11.4 ウィナー積分とファインマン積分	107
<b>第 2 章 レヴィ過程 (佐藤 健一)</b>	<b>113</b>
2.1 標準形と生成要素	113
2.1.1 レヴィ過程, 加法過程の定義とポアソン過程, 複合ポアソン過程	113
2.1.2 無限分解可能分布とその標準形	116
2.1.3 レヴィ過程の生成要素	120
2.1.4 加法過程の標準形	121
2.2 見本関数のレヴィ-伊藤分解	122
2.2.1 レヴィ-伊藤分解の定式化	122
2.2.2 レヴィ-伊藤分解の応用, レヴィ過程の見本関数	124
2.3 安定分布と安定過程	125
2.3.1 定義と指数	125
2.3.2 安定分布と安定過程の標準形	127
2.3.3 安定過程の例	129
2.4 自己分解可能分布と自己分解可能過程	130
2.4.1 定義と標準形	130
2.4.2 自己分解可能分布の表現	131
2.4.3 自己分解可能分布の例	132
2.5 レヴィ過程の再帰的と過渡的への分類	134
2.5.1 ポテンシャル測度との関係	134
2.5.2 再帰的, 過渡的の判定条件	135
2.5.3 次元による違い	135
2.6 レヴィ過程のポテンシャル論的性質	137
2.6.1 レヴィ過程から定まるハント過程	137
2.6.2 更新定理	138
2.6.3 ポテンシャル測度の絶対連続性	138
2.6.4 容量	139
2.6.5 到達可能点と一点の正則性	140
2.7 レヴィ過程の分布の時間発展	141
2.7.1 モーメント	142
2.7.2 連続, 絶対連続, 特異などの性質	143
2.7.3 単峰性	144
2.8 レヴィ過程の見本関数の詳しい性質	144
2.8.1 $t \rightarrow 0$ または $t \rightarrow \infty$ における挙動	145
2.8.2 滞在密度	146
2.8.3 ウィナー-ホップ因子分解	147
2.9 レヴィ過程の変換	148
2.9.1 従属操作	148
2.9.2 エシャール変換	149

**第 3 章** ガウス系 (飛田 武幸) **153**

3.1 初めに . . . . . 153

3.1.1 ガウス系の特徴づけ . . . . . 154

3.1.2 ガウス系の確率分布 . . . . . 157

3.1.3 ガウス系の存在定理 . . . . . 158

3.2 ガウス型時系列 (離散パラメータガウス過程) . . . . . 158

3.3 時系列のマルコフ性, 定常性 . . . . . 163

3.4 ガウス過程 (連続パラメータの場合) その I . . . . . 166

3.4.1 レヴィの内挿法によるブラウン運動の構成 . . . . . 167

3.5 ガウス-マルコフ過程 . . . . . 170

3.6 多重マルコフ-ガウス過程 . . . . . 171

3.7 ガウス過程 (連続パラメータの場合) その II . . . . . 178

3.7.1 標準表現の存在定理 . . . . . 179

3.8 ガウス過程 (連続パラメータの場合) その III . . . . . 180

3.9 白色雑音の超汎関数 . . . . . 182

3.9.1 超汎関数の解析 . . . . . 185

**第 4 章** マルコフ過程 I (福島 正俊) **189**

4.1 マルコフ過程のクラス . . . . . 189

4.1.1 確率過程のマルコフ性 . . . . . 189

4.1.2 マルコフ過程 . . . . . 192

4.1.3 右過程, 標準過程, ハント過程, 拡散過程 . . . . . 193

4.2 マルコフ過程の生成作用素とその表現 . . . . . 198

4.2.1 いくつかの生成作用素 . . . . . 198

4.2.2 ステップ過程 . . . . . 203

4.2.3 1次元極小拡散過程 . . . . . 204

4.3 右過程における基本概念 . . . . . 206

4.3.1 ポテンシャル論的諸概念 . . . . . 206

4.3.2 過渡性, 再帰性, 既約性, エルゴード定理 . . . . . 210

**第 5 章** マルコフ過程 II (福島 正俊) **215**

5.1 マルコフ過程の生成 . . . . . 215

5.1.1 マルチンゲール問題と多次元拡散過程 . . . . . 215

5.1.2 レイ過程 . . . . . 217

5.1.3 デイリクレ形式と対称作用素のマルコフ的半群 . . . . . 218

5.1.4 デイリクレ形式と対称マルコフ過程 . . . . . 220

5.2 加法汎関数 . . . . . 224

5.2.1 右過程の正值連続加法汎関数 . . . . . 224

5.2.2 ハント過程のマルチンゲール加法汎関数 . . . . . 226

5.2.3 対称ハント過程の正值連続加法汎関数と滑らかな測度 . . . . . 229

5.2.4 対称ハント過程の加法汎関数の分解 . . . . . 230

5.3 マルコフ過程の変換 . . . . . 233

5.3.1 減少乗法汎関数と消滅操作 . . . . . 233

5.3.2 優マルチンゲール乗法汎関数と絶対連続変換 . . . . . 236

5.3.3 正值連続加法汎関数による時間変更 . . . . . 237

**第 6 章** マルチンゲール (渡辺 信三) **241**

6.1 定義と基本性質 . . . . . 241

6.2 離散時間マルチンゲール . . . . . 244

6.2.1 マルチンゲール変換, 任意停止定理と任意選択定理 . . . . . 244

6.2.2 離散時間劣マルチンゲールの Doob-Meyer 分解 . . . . . 248

6.2.3 最適停止問題への応用, スネル包 . . . . . 249

6.2.4 最大不等式, 横断数不等式, 収束定理 . . . . . 252

6.2.5 収束定理の応用例 (離散時間) . . . . . 255

6.2.6 Burkholder-Davis-Gundy 不等式, Fefferman 不等式 . . . . . 258

6.3 連続時間マルチンゲール, 半マルチンゲールと確率解析 . . . . . 259

6.3.1 基本概念, 見本関数の càdlàg-変形定理 . . . . . 259

6.3.2 連続時間劣マルチンゲールの Doob-Meyer 分解定理 . . . . . 260

6.3.3 マルチンゲールによる確率積分 . . . . . 261

6.3.4 半マルチンゲールと伊藤公式 . . . . . 263

**第 7 章** 確率微分方程式 (國田 寛) **269**

7.1 伊藤の確率微分方程式と拡散過程 . . . . . 269

7.1.1 確率積分 . . . . . 270

7.1.2 伊藤の確率微分方程式の定義と解, 解の近似 . . . . . 272

7.1.3 解の初期値に関する滑らかさ, 微分同型のフローおよびフローのチェインルール . . . . . 274

7.1.4 解の定義する (非定常) 拡散過程と拡散方程式 . . . . . 275

7.2 確率微分方程式の Stratonovich 積分による表示 . . . . . 278

7.2.1 Stratonovich 積分 . . . . . 278

7.2.2 Stratonovich 積分による確率微分方程式と伊藤の確率微分方程式 . . . . . 279

7.2.3 解の Wong-Zakai 近似と台 (サポート) . . . . . 281

7.2.4 Malliavin の非退化確率微分方程式 . . . . . 283

7.2.5 多様体上の確率微分方程式 . . . . . 285

7.2.6 多様体上の拡散過程とその水平リフト . . . . . 286

7.3 飛躍のある確率微分方程式 . . . . . 287

7.3.1 方程式の定義と解 . . . . . 288

7.3.2 レヴィフローとそのチェインルール, 飛躍拡散過程 . . . . . 289

7.3.3 Stratonovich 積分表示による確率微分方程式, Marcus の確率微分方程式 . . . . . 291

7.3.4 Malliavin-Picard の非退化確率微分方程式 . . . . . 292

7.4 様々な確率微分方程式 . . . . . 295

7.4.1 弱い解と強い解 . . . . . 296

7.4.2 マルコフ型の場合, マルチンゲール問題 . . . . . 298

7.4.3 境界条件をもつ確率微分方程式 . . . . . 300

7.4.4 無限次元確率微分方程式, 確率偏微分方程式 . . . . . 301

7.4.5 後ろ向き確率微分方程式, Skorohod 積分による確率微分方程式 . . . . . 302

<b>第 8 章</b>	<b>マリアバン解析 (重川 一郎)</b>	<b>307</b>			
8.1	序文	307			
8.2	抽象 Wiener 空間	309			
8.2.1	ガウス測度	309			
8.2.2	抽象 Wiener 空間	310			
8.2.3	重複 Wiener 積分	311			
8.2.4	古典的 Wiener 空間	312			
8.3	Ornstein–Uhlenbeck 過程	314			
8.3.1	$H$ -微分と Dirichlet 形式	314			
8.3.2	Ornstein–Uhlenbeck 半群と Ornstein–Uhlenbeck 作用素	315			
8.3.3	Poincaré の不等式, 対数 Sobolev 不等式, 等周不等式	317			
8.4	抽象 Wiener 空間上の Sobolev 空間	319			
8.4.1	Sobolev 空間	319			
8.4.2	容量と正の超関数	321			
8.4.3	作用素の連続性	323			
8.4.4	共役作用素 $D^*$	324			
8.5	超関数と分布のなめらかさ	326			
8.5.1	一般 Wiener 汎関数	326			
8.5.2	Malliavin 共分散行列と部分積分の公式	327			
8.5.3	Wiener 汎関数の漸近展開	329			
8.6	確率微分方程式への応用	330			
8.6.1	確率微分方程式の解の微分可能性	331			
8.6.2	基本解の漸近展開	334			
8.7	道の空間—無限次元の多様体	336			
8.7.1	多様体上の道の空間	336			
8.7.2	不等式	338			
8.7.3	抽象 Wiener 空間上の de Rham 複体	339			
<b>第 9 章</b>	<b>確率論における極限定理 (笠原 勇二)</b>	<b>343</b>			
9.1	大数の法則と中心極限定理	343			
9.1.1	大数の法則	343			
9.1.2	中心極限定理	344			
9.2	正則変動関数と Tauber 型定理	346			
9.2.1	緩慢変動関数と正則変動関数	346			
9.2.2	Karamata の Tauber 型定理	348			
9.2.3	正則変動関数の逆関数	349			
9.2.4	指数型 Tauber 型定理	350			
9.3	独立確率変数の和に関する極限定理	351			
9.3.1	i.i.d. の累積和と安定分布の牽引域	352			
9.3.2	無限分解可能分布への収束	354			
9.3.3	最大値に関する極限定理	356			
9.4	関数型極限定理	357			
9.4.1	距離空間における法則収束	357			
9.5	連続関数の空間 $C([0, T]: H)$	358			
9.5.1	Skorohod の関数空間 $D([0, 1]: H)$	360			
9.5.2	Donsker の不変原理と Skorohod による拡張	364			
9.5.3	経験分布に関する極限定理	366			
<b>第 10 章</b>	<b>エルゴード理論 (浜地 敏弘)</b>	<b>369</b>			
10.1	弱混合性	369			
10.1.1	保測変換の準同型	370			
10.1.2	弱混合変換の直積	372			
10.1.3	$\mathcal{A}$ -属性測度に関する平均エルゴード定理	374			
10.1.4	弱混合性の新しい特徴付け	378			
10.2	性質 MSJ を持つ力学系	382			
10.2.1	力学系の結合分布	382			
10.2.2	性質 MSJ	384			
10.3	シャコン変換	386			
10.3.1	切断・累積構成	386			
10.3.2	シャコン変換のエルゴード性	388			
10.3.3	シャコン変換は性質 MSJ を持つ	389			
10.4	パスカル変換	392			
10.4.1	構成	393			
10.4.2	エルゴード性	395			
<b>第 11 章</b>	<b>確率論と数理物理 (小谷 眞一)</b>	<b>399</b>			
11.1	大規模相互作用系 (舟木 直久)	399			
11.1.1	Markov 的確率モデル	399			
11.1.2	流体力学極限	401			
11.1.3	対称な格子気体モデルと非線形拡散方程式, Green–久保の公式	402			
11.1.4	非対称な格子気体モデルと双曲型尺度極限	406			
11.1.5	相互作用 (干渉) Brown 粒子系と $\nabla\varphi$ 界面モデル	407			
11.2	ランダム媒質 (熊谷 隆・福島 竜輝・中島 誠・吉田 伸生・小谷 眞一)	409			
11.2.1	フラクタル上の拡散過程	410			
11.2.2	ランダム媒質中の対称マルコフ過程 (ランダムコンダクタンスモデル)	413			
11.2.3	臨界確率におけるパーコレーションクラスター上のランダムウォーク と Alexander–Orbach 予想	416			
11.2.4	ランダム媒質中の非対称マルコフ過程	420			
11.2.5	ランダム環境中の分枝過程	422			
11.2.6	ランダムポリマー	423			
11.2.7	ランダム・シュレーディンガー作用素	427			
11.3	Self-avoiding walk, パーコレーション, イジングモデル (原 隆・樋口 保成・篠田 正人・竹居 正登)	434			
11.3.1	相転移と臨界現象	435			
11.3.2	Self-Avoiding Walk	435			
11.3.3	パーコレーション	439			

11.3.4	イジングモデル	441	13.1.3	Kalman–Bucy フィルター	495
11.4	SLE (Schramm–Loewner Evolution) (白井 朋之・香取 眞理)	443	13.2	非線形フィルター (國田 寛)	497
11.4.1	共形不変性と領域マルコフ性	443	13.2.1	非線形フィルターとベイズ公式	497
11.4.2	レブナー方程式	444	13.2.2	システム・観測過程 (I) システムとノイズが独立の場合	498
11.4.3	$SLE_{\kappa}$	445	13.2.3	システム・観測過程 (II) システムとノイズが相関する場合	499
11.4.4	$SLE_{\kappa}$ の 3 相	446	13.2.4	イノベーションの問題	501
11.4.5	一般のジョルダン領域における $SLE_{\kappa}$	447	13.2.5	フィルターのみたす確率微分方程式 (I) システムがセミマルチンゲールの場合	502
11.4.6	$SLE_{\kappa}$ の制限性 ( $\kappa = 8/3$ ) と局所性 ( $\kappa = 6$ )	448	13.2.6	フィルターのみたす確率微分方程式 (II) システムがマルコフ過程の場合	504
11.4.7	離散モデルとその連続極限	448	13.2.7	フィルターのみたす確率微分方程式 (III) 条件付きガウス分布の場合	506
11.4.8	共形場理論との関係	448	13.2.8	確率偏微分方程式のコーシー問題	506
11.5	ランダム行列 (長田 博文)	450	13.3	確率制御理論 (西尾 眞喜子)	507
11.5.1	有限粒子系・対数ガス	451	13.3.1	ダイナミックプログラミングと HJB 方程式	508
11.5.2	Wigner の半円法則	454	13.3.2	確率的最大値原理	511
11.5.3	配置空間・点過程・相関関数	454	13.3.3	リスク鋭感的制御	512
11.5.4	Gibbs 測度・行列式測度	457	13.3.4	部分的可観測な確率制御	513
11.5.5	無限粒子系	460			
11.5.6	普遍性予想	463			
11.5.7	無限次元確率力学系	464			
<b>第 12 章</b>	<b>確率論と生物学 (志賀 徳造)</b>	<b>467</b>	<b>第 14 章</b>	<b>確率論とファイナンス (楠岡 成雄・高岡 浩一郎)</b>	<b>517</b>
12.1	個体数の変動モデル—分枝過程	467	14.1	離散時間モデル	517
12.1.1	Galton–Watson 過程	467	14.1.1	モデルの説明	517
12.1.2	連続時間 Galton–Watson 過程	469	14.1.2	no arbitrage と state price deflator	519
12.1.3	分枝マルコフ過程	469	14.1.3	no arbitrage と EMM	520
12.1.4	測度値分枝拡散過程への収束	471	14.2	派生証券の価格	522
12.1.5	測度値分枝拡散過程と偏微分方程式	472	14.2.1	ヨーロッパ型派生証券, アメリカ型派生証券	522
12.1.6	時間無限大の挙動	474	14.2.2	ヨーロッパ型派生証券の価格 (完備な場合)	524
12.1.7	スーパー・ブラウン運動の道の性質	475	14.2.3	アメリカ型派生証券の価格 (完備な場合)	525
12.2	集団遺伝学の確率モデル	477	14.2.4	ヨーロッパ型派生証券の優複製費用	525
12.2.1	Wright–Fisher モデル	477	14.2.5	アメリカ型派生証券の優複製費用	527
12.2.2	遺伝的多形と固定	478	14.3	連続時間モデル	528
12.2.3	2 アレルモデルの固定確率と固有价值	478	14.3.1	基本定理	528
12.2.4	Wright–Fisher モデルの拡散近似	480	14.3.2	ヨーロッパ型派生証券, アメリカ型派生証券	532
12.2.5	他の拡散モデルの例	482	14.3.3	Black–Scholes モデル	534
12.2.6	無限タイプ Wright–Fisher モデルと Fleming–Viot 過程	483	14.4	Weakly Brownian Filtration	535
12.2.7	太田–木村モデルと対応する Fleming–Viot 過程	485			
12.2.8	無限アレル中立型突然変異モデル	486	<b>第 15 章</b>	<b>確率論と数値解析 (小川 重義・杉田 洋)</b>	<b>539</b>
12.2.9	無限アレル中立型突然変異モデルの推移確率	488	15.1	乱数	539
12.2.10	標本抽出理論	489	15.1.1	乱数の定義: 有限列の場合	539
<b>第 13 章</b>	<b>確率制御とフィルター (國田 寛・西尾 眞喜子)</b>	<b>493</b>	15.1.2	Martin–Löf の定理	540
13.1	線形フィルター (國田 寛)	493	15.1.3	乱数の定義: 無限列の場合	542
13.1.1	序論	493	15.2	疑似乱数	543
13.1.2	Kalman フィルター	494			

15.2.1	疑似乱数の定義 . . . . .	543
15.2.2	疑似乱数の存在問題 . . . . .	544
15.2.3	疑似乱数の例 . . . . .	544
15.3	準乱数 . . . . .	546
15.3.1	準乱数の例 . . . . .	546
15.3.2	複雑な被積分関数の数値積分 . . . . .	547
15.4	SDE の数値解法 . . . . .	547
15.5	近似の対象 . . . . .	548
15.5.1	数値近似の意味—基本仮定 . . . . .	548
15.5.2	数値解法の手順 . . . . .	549
15.5.3	有限差分法による離散化 . . . . .	549
15.5.4	近似の種類と精度 . . . . .	550
15.6	有限差分法, その 1—導き方 . . . . .	551
15.6.1	確率テイラー展開 . . . . .	551
15.6.2	狭義の差分法—「何を基本的変量とするか？」 . . . . .	553
15.6.3	狭義差分法の例 . . . . .	554
15.7	有限差分法, その 2—近似の精度 . . . . .	555
15.7.1	強近似解の精度 . . . . .	555
15.7.2	折れ線接続による近似解 . . . . .	556
15.7.3	補足—ルンゲ-クッタ法 . . . . .	556
15.8	有限差分法, その 3—精度限界と改良 . . . . .	557
15.8.1	狭義差分法の精度限界 . . . . .	557
15.8.2	差分法の精度に関する課題 . . . . .	558
15.9	補足—弱近似解の為の差分法 . . . . .	559
15.10	補足 2—その他の話題 . . . . .	559
15.10.1	弱近似法の改良—リチャードソン加速法 . . . . .	559
15.10.2	良い乱数の条件 . . . . .	560
15.10.3	非線形拡散問題への応用 . . . . .	561