



# 目次

## I 集合と論理

[飯高 茂]

|                      |           |
|----------------------|-----------|
| <b>第1章 集 合</b>       | <b>2</b>  |
| 1.1 命 題 .....        | 2         |
| 1.2 集合の定義と記号 .....   | 4         |
| 1.3 集合の演算 .....      | 8         |
| <b>第2章 写 像</b>       | <b>14</b> |
| 2.1 写像の定義と基本事項 ..... | 14        |
| 2.2 写像の演算 .....      | 15        |
| 2.3 単射と全射 .....      | 18        |
| 2.4 写像とグラフ .....     | 22        |
| 2.5 対 応 .....        | 23        |
| 2.6 演算子 .....        | 24        |
| 2.7 関 係 .....        | 27        |
| <b>第3章 濃度と順序</b>     | <b>33</b> |
| 3.1 集合の濃度 .....      | 33        |
| 3.2 非可算集合 .....      | 34        |
| 3.3 順序関係 .....       | 36        |
| <b>第4章 命題論理</b>      | <b>39</b> |
| 4.1 真理関数 .....       | 39        |
| <b>第5章 圏と関手</b>      | <b>42</b> |
| 5.1 圏 .....          | 42        |
| 5.2 圏の基本概念 .....     | 44        |
| 5.3 関手と自然変換 .....    | 45        |

## II 線形代数

[前原和寿]

|                         |           |
|-------------------------|-----------|
| <b>第1章 平面および空間のベクトル</b> | <b>50</b> |
| 1.1 幾何ベクトル .....        | 50        |

|            |                                |           |
|------------|--------------------------------|-----------|
| 1.2        | 数ベクトル .....                    | 52        |
| <b>第2章</b> | <b>行 列</b>                     | <b>54</b> |
| 2.1        | 行列の定義 .....                    | 54        |
| 2.2        | 行列の和およびスカラー倍 .....             | 55        |
| 2.3        | 行列の積 .....                     | 56        |
| 2.4        | 転置行列 .....                     | 57        |
| 2.5        | 逆行列, 正則行列 .....                | 58        |
| 2.6        | 行列の基本変形 .....                  | 58        |
| 2.7        | 連立1次方程式系の解法(1) .....           | 59        |
| 2.8        | 逆行列の基本変形による求め方 .....           | 60        |
| 2.9        | 行列の基本変形と階数 .....               | 60        |
| <b>第3章</b> | <b>行 列 式</b>                   | <b>65</b> |
| 3.1        | 平行四辺形の符号付き面積, 平行体の符号付き体積 ..... | 65        |
| 3.2        | クラメルの解法(1) .....               | 67        |
| 3.3        | ベクトル積, 内積, 3重積 .....           | 69        |
| 3.4        | 行列式の定義 .....                   | 73        |
| 3.5        | 一般の行列式 .....                   | 75        |
| 3.6        | 行列式の展開, 一般ラプラス展開 .....         | 76        |
| 3.7        | 複数個の行列の積の行列式 .....             | 77        |
| 3.8        | 余因子と余因子行列 .....                | 78        |
| 3.9        | 行列式の重要な例 .....                 | 79        |
| 3.10       | 固有値と固有ベクトル .....               | 80        |
| 3.11       | パーマメント .....                   | 81        |
| <b>第4章</b> | <b>抽象ベクトル空間</b>                | <b>83</b> |
| 4.1        | 代数系の定義 .....                   | 83        |
| 4.2        | 部分ベクトル空間, 1次独立系, 生成系, 基底 ..... | 87        |
| 4.3        | 基底に関する定理 .....                 | 88        |
| 4.4        | アフィン空間 .....                   | 90        |
| 4.5        | アフィン写像 .....                   | 91        |
| 4.6        | 線形写像の行列表示 .....                | 92        |
| 4.7        | 正方行列の相似 .....                  | 94        |
| 4.8        | 行列表示の標準形 .....                 | 95        |
| 4.9        | 行列のジョルダン標準形 .....              | 97        |
| 4.10       | 対角化可能, 固有空間, 対角化可能性 .....      | 98        |
| 4.11       | 交換可能な行列の三角化 .....              | 99        |

|                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| 4.12 線形写像 (準同型) の行列表示 .....     | 102        |
| <b>第5章 エルミート行列とユニタリ行列</b> ..... | <b>105</b> |
| 5.1 エルミート内積 .....               | 105        |
| 5.2 正規行列, ユニタリ行列, エルミート行列 ..... | 105        |
| 5.3 2次形式 .....                  | 108        |

# III

## 微分積分学

[中村 滋]

|                          |            |
|--------------------------|------------|
| <b>第1章 実数と連続関数</b> ..... | <b>112</b> |
| 1.1 実数の連続性 .....         | 112        |
| 1.2 数列とその極限值 .....       | 114        |
| 1.3 関数と連続関数 .....        | 119        |
| <b>第2章 微分法</b> .....     | <b>125</b> |
| 2.1 導関数 .....            | 125        |
| 2.2 平均値の定理 .....         | 130        |
| 2.3 高次導関数 .....          | 133        |
| <b>第3章 微分法の応用</b> .....  | <b>141</b> |
| 3.1 極値 .....             | 141        |
| 3.2 不定形の極限值 .....        | 145        |
| 3.3 関数のグラフ .....         | 149        |
| 3.4 接線と曲率 .....          | 152        |
| <b>第4章 積分法</b> .....     | <b>158</b> |
| 4.1 不定積分 .....           | 158        |
| 4.2 有理関数の不定積分 .....      | 162        |
| 4.3 定積分 .....            | 168        |
| 4.4 広義積分 .....           | 173        |
| 4.5 定積分の計算法 .....        | 175        |
| 4.6 定積分の応用 .....         | 179        |
| <b>第5章 無限級数</b> .....    | <b>185</b> |
| 5.1 無限級数 .....           | 185        |
| 5.2 関数項の級数 .....         | 189        |
| 5.3 整級数 (冪級数) .....      | 192        |
| <b>第6章 偏微分法</b> .....    | <b>196</b> |
| 6.1 多変数関数の偏導関数 .....     | 196        |
| 6.2 陰関数定理 .....          | 204        |

|            |             |            |
|------------|-------------|------------|
| 6.3        | 2変数関数の極値    | 209        |
| <b>第7章</b> | <b>重積分</b>  | <b>216</b> |
| 7.1        | 多変数関数の積分    | 216        |
| 7.2        | 重積分の計算と応用   | 220        |
| 7.3        | ベータ関数・ガンマ関数 | 223        |

## **IV 代数学 (群, 環, 体)** [和田秀男]

|            |                |            |
|------------|----------------|------------|
| <b>第1章</b> | <b>群</b>       | <b>230</b> |
| 1.1        | 群の定義           | 230        |
| 1.2        | 部分群と剰余類        | 233        |
| 1.3        | 正規部分群と剰余群      | 236        |
| 1.4        | 準同型定理          | 238        |
| 1.5        | 有限生成アーベル群の基本定理 | 240        |
| 1.6        | 可解群            | 243        |
| <b>第2章</b> | <b>環</b>       | <b>246</b> |
| 2.1        | 環と体の定義         | 246        |
| 2.2        | ユークリッド環        | 248        |
| 2.3        | イデアルと準同型       | 254        |
| 2.4        | 単項イデアル環        | 258        |
| <b>第3章</b> | <b>体</b>       | <b>260</b> |
| 3.1        | 体の拡大           | 260        |
| 3.2        | 作図問題           | 262        |
| 3.3        | 有限体            | 263        |
| 3.4        | 体の同型           | 264        |
| 3.5        | ガロアの理論         | 266        |
| 3.6        | 代数方程式の代数的解法    | 269        |

## **V ベクトル解析** [中村 滋]

|            |                         |            |
|------------|-------------------------|------------|
| <b>第1章</b> | <b>ベクトル関数の微分と積分</b>     | <b>274</b> |
| 1.1        | ベクトルの関数とその微分            | 274        |
| 1.2        | 線積分・面積分                 | 279        |
| <b>第2章</b> | <b>ベクトル場の微分演算子と積分定理</b> | <b>286</b> |
| 2.1        | スカラー場とベクトル場             | 286        |

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 2.2 微分演算子と積分定理 ..... | 289 |
|----------------------|-----|

## VI 位相空間

[一樂重雄]

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| <b>第1章 ユークリッド空間と距離空間</b>  | <b>298</b> |
| 1.1 ユークリッド空間 .....        | 298        |
| 1.2 距離空間 .....            | 299        |
| <b>第2章 位相空間</b>           | <b>301</b> |
| 2.1 近傍系 .....             | 302        |
| 2.2 開集合 .....             | 303        |
| 2.3 連続写像 .....            | 305        |
| <b>第3章 点列の収束と分離公理</b>     | <b>307</b> |
| <b>第4章 閉集合</b>            | <b>311</b> |
| <b>第5章 部分空間, 積空間, 商空間</b> | <b>313</b> |
| 5.1 部分空間 .....            | 313        |
| 5.2 積空間 .....             | 314        |
| 5.3 商空間 .....             | 315        |
| <b>第6章 連結性</b>            | <b>317</b> |
| 6.1 連結性の定義 .....          | 317        |
| <b>第7章 コンパクト性</b>         | <b>320</b> |
| 7.1 位相空間でのコンパクト性 .....    | 320        |
| 7.2 点列コンパクト .....         | 323        |

## VII 位相幾何学

[一樂重雄]

|                        |            |
|------------------------|------------|
| <b>第1章 位相幾何学</b>       | <b>326</b> |
| 1.1 位相幾何学とは .....      | 326        |
| 1.2 基本群 .....          | 326        |
| 1.3 連続写像が導く準同型写像 ..... | 329        |
| 1.4 基本群の例 .....        | 331        |
| 1.5 基本群の応用 .....       | 333        |
| 1.6 高次のホモトピー群 .....    | 334        |
| <b>第2章 ホモロジー群</b>      | <b>336</b> |
| 2.1 単体 .....           | 336        |
| 2.2 単体的複体 .....        | 337        |

|      |                  |     |
|------|------------------|-----|
| 2.3  | チェーンとチェーン群       | 338 |
| 2.4  | 多面体              | 340 |
| 2.5  | 単体分割             | 341 |
| 2.6  | 重心細分             | 341 |
| 2.7  | 単体近似             | 344 |
| 2.8  | チェーンホモトピー        | 345 |
| 2.9  | ホモロジー群のホモトピー不変性  | 345 |
| 2.10 | オイラー・ポアンカレの定理    | 346 |
| 2.11 | 相対ホモロジー          | 347 |
| 2.12 | 完全系列             | 347 |
| 2.13 | マイヤー・ヴィートリスの完全系列 | 349 |
| 2.14 | 閉曲面とそのホモロジー      | 350 |

## VIII 曲線と曲面

[川崎徹郎]

|            |                  |            |
|------------|------------------|------------|
| <b>第1章</b> | <b>空間曲線</b>      | <b>352</b> |
| 1.1        | 接ベクトルと弧長パラメータ    | 352        |
| 1.2        | 曲率               | 353        |
| 1.3        | 捩率とフルネ・セレの公式     | 354        |
| 1.4        | ブーケの公式, 曲線の局所的形状 | 357        |
| 1.5        | 自然方程式            | 359        |
| <b>第2章</b> | <b>曲面論</b>       | <b>361</b> |
| 2.1        | 曲面のパラメータ表示       | 361        |
| 2.2        | 接平面と第1基本形式       | 363        |
| 2.3        | ガウス写像と第2基本形式     | 367        |
| 2.4        | 曲面の種々の曲率         | 370        |
| 2.5        | 基本公式と基本方程式       | 374        |
| 2.6        | 曲面論の基本定理         | 377        |
| 2.7        | 測地線と極小曲面         | 379        |
| 2.8        | ガウス・ボネの定理        | 380        |

## IX 多様体

[川崎徹郎]

|            |            |            |
|------------|------------|------------|
| <b>第1章</b> | <b>多様体</b> | <b>384</b> |
| 1.1        | 位相多様体      | 384        |

|      |                        |     |
|------|------------------------|-----|
| 1.2  | 閉曲面の位相的分類              | 385 |
| 1.3  | 微分可能多様体                | 387 |
| 1.4  | 接ベクトルと接空間              | 389 |
| 1.5  | 写像の微分                  | 392 |
| 1.6  | 逆写像定理の応用               | 396 |
| 1.7  | 張り合わせによる多様体の構成         | 400 |
| 1.8  | 1 の分割                  | 402 |
| 1.9  | サードの定理                 | 403 |
| 1.10 | ホイットニーの埋め込み定理          | 404 |
| 1.11 | ベクトル場と流れ               | 405 |
| 1.12 | ベクトル場のブラケット積とフロベニウスの定理 | 408 |
| 1.13 | 微分 1 形式                | 411 |
| 1.14 | 微分 $p$ 形式              | 413 |
| 1.15 | 外積と外微分                 | 415 |
| 1.16 | モース関数とハンドル分解           | 417 |
| 1.17 | 球面の裏返し                 | 422 |

# X 常微分方程式

[原 惟行・内藤 学・内藤敏機]

|              |                      |            |
|--------------|----------------------|------------|
| <b>第 1 章</b> | <b>常微分方程式の初等解法</b>   | <b>428</b> |
| 1.1          | 常微分方程式の例             | 428        |
| 1.2          | 求積法                  | 429        |
| <b>第 2 章</b> | <b>線形常微分方程式の基礎定理</b> | <b>434</b> |
| 2.1          | 単独線形常微分方程式           | 434        |
| 2.2          | 連立微分方程式              | 440        |
| 2.3          | 行列の指数関数              | 441        |
| 2.4          | 一般の定数係数線形微分方程式の解     | 443        |
| <b>第 3 章</b> | <b>複素常微分方程式</b>      | <b>447</b> |
| 3.1          | 線形方程式の正則解            | 447        |
| 3.2          | 線形方程式の確定特異点          | 449        |
| 3.3          | 漸近級数展開               | 456        |
| 3.4          | パウルヴェ方程式             | 459        |
| <b>第 4 章</b> | <b>基礎定理</b>          | <b>461</b> |
| 4.1          | 解の存在と一意性             | 461        |
| 4.2          | 解の初期値に関する連続性         | 464        |



|                                     |            |
|-------------------------------------|------------|
| <b>第 5 章 解の漸近挙動</b>                 | <b>466</b> |
| 5.1 平衡点 .....                       | 466        |
| 5.2 安定性の定義 .....                    | 466        |
| 5.3 線形系の安定性 .....                   | 467        |
| 5.4 ラウス・フルヴィッツの判定法 .....            | 467        |
| 5.5 線形系の解の漸近挙動 .....                | 468        |
| 5.6 概線形系の解の漸近挙動 .....               | 470        |
| 5.7 リャプーノフの方法 .....                 | 470        |
| 5.8 ポアンカレ・ベンディクソンの定理 .....          | 473        |
| 5.9 大域解 .....                       | 474        |
| <b>第 6 章 タイムラグをもつ微分方程式</b>          | <b>476</b> |
| 6.1 タイムラグをもつ微分方程式の例 .....           | 476        |
| 6.2 特性方程式 .....                     | 477        |
| 6.3 安定性の定義 .....                    | 477        |
| 6.4 漸近安定性 .....                     | 478        |
| 6.5 リャプーノフ・ラズミーヒンの方法による安定性判別法 ..... | 479        |
| 6.6 解の振動性 .....                     | 481        |
| <b>第 7 章 境界値問題</b>                  | <b>482</b> |
| 7.1 線形微分方程式 .....                   | 482        |
| 7.2 非線形微分方程式 .....                  | 491        |
| <b>第 8 章 振動理論</b>                   | <b>494</b> |
| 8.1 解の漸近挙動 .....                    | 494        |
| 8.2 振動理論 .....                      | 495        |

# XI 複素関数

[若林 功]

|                         |            |
|-------------------------|------------|
| <b>第 1 章 複素関数</b>       | <b>500</b> |
| 1.1 複素数, 複素平面 .....     | 500        |
| 1.2 数列, 級数, 関数 .....    | 503        |
| <b>第 2 章 正則関数</b>       | <b>506</b> |
| 2.1 正則関数 .....          | 506        |
| 2.2 コーシー・リーマンの関係式 ..... | 507        |
| 2.3 基本的な正則関数 .....      | 509        |
| <b>第 3 章 積 分</b>        | <b>514</b> |
| 3.1 線積分 .....           | 514        |

|            |                    |            |
|------------|--------------------|------------|
| 3.2        | 複素積分 .....         | 517        |
| 3.3        | コーシーの積分定理 .....    | 520        |
| 3.4        | コーシーの積分公式 .....    | 523        |
| 3.5        | 調和関数の定義 .....      | 524        |
| 3.6        | 最大値の原理 .....       | 526        |
| 3.7        | リューヴィルの定理 .....    | 527        |
| <b>第4章</b> | <b>冪級数, ローラン展開</b> | <b>529</b> |
| 4.1        | 冪級数 .....          | 529        |
| 4.2        | 一致の定理 .....        | 532        |
| 4.3        | ローラン展開 .....       | 533        |
| <b>第5章</b> | <b>留数とその応用</b>     | <b>536</b> |
| 5.1        | 留数定理 .....         | 536        |
| 5.2        | 定積分への応用 .....      | 539        |
| 5.3        | 偏角の原理 .....        | 543        |
| <b>第6章</b> | <b>等角写像</b>        | <b>545</b> |
| 6.1        | 正則写像 .....         | 545        |
| 6.2        | 1次変換 .....         | 548        |
| 6.3        | 等角写像の基本定理 .....    | 550        |
| <b>第7章</b> | <b>有理型関数の表示</b>    | <b>551</b> |
| 7.1        | 有理型関数の部分分数分解 ..... | 551        |
| 7.2        | 有理型関数の無限積表示 .....  | 552        |
| <b>第8章</b> | <b>調和関数</b>        | <b>557</b> |
| 8.1        | 共役調和関数の構成 .....    | 557        |
| 8.2        | 調和関数の平均値定理 .....   | 558        |
| 8.3        | ポアソンの公式 .....      | 559        |
| 8.4        | ディリクレの境界値問題 .....  | 560        |

## XII 積分論

[渡邊壽夫]

|            |                |            |
|------------|----------------|------------|
| <b>第1章</b> | <b>積分論</b>     | <b>564</b> |
| 1.1        | 集合族 .....      | 564        |
| 1.2        | 可測写像 .....     | 566        |
| 1.3        | 測度 .....       | 568        |
| 1.4        | 積分 .....       | 573        |
| 1.5        | $L^p$ 空間 ..... | 575        |

|      |                     |     |
|------|---------------------|-----|
| 1.6  | ヒルベルト空間 .....       | 577 |
| 1.7  | 積測度 .....           | 578 |
| 1.8  | 2つの測度の関係 .....      | 578 |
| 1.9  | リーマン積分とルベーグ積分 ..... | 580 |
| 1.10 | 線形汎関数と測度 .....      | 581 |
| 1.11 | 測度の収束 .....         | 582 |

## XIII 偏微分方程式入門

[吉川 敦]

|              |                         |            |
|--------------|-------------------------|------------|
| <b>第 1 章</b> | <b>偏微分方程式とは何か</b>       | <b>586</b> |
| 1.1          | 簡単な例 .....              | 586        |
| 1.2          | 偏微分方程式, 解, それらの解釈 ..... | 589        |
| <b>第 2 章</b> | <b>基本的な線形偏微分方程式</b>     | <b>591</b> |
| 2.1          | 重ね合わせの原理 .....          | 591        |
| 2.2          | ダランベールの公式 .....         | 594        |
| <b>第 3 章</b> | <b>変数分離法</b>            | <b>597</b> |
| 3.1          | 弦の振動の方程式 .....          | 597        |
| 3.2          | 要素解の重ね合わせと収束 .....      | 599        |
| <b>第 4 章</b> | <b>熱方程式</b>             | <b>609</b> |
| 4.1          | 直線上の熱方程式 .....          | 609        |
| 4.2          | 熱方程式と変数分離法 .....        | 612        |
| <b>第 5 章</b> | <b>平面のラプラシアン</b>        | <b>616</b> |
| 5.1          | 固有値問題の変数分離解 .....       | 616        |
| 5.2          | 長方形領域でのディリクレ問題 .....    | 618        |
| <b>第 6 章</b> | <b>円板領域と変数分離解</b>       | <b>623</b> |
| 6.1          | 極座標と調和関数 .....          | 623        |
| 6.2          | ポアソンの公式 .....           | 627        |
| 6.3          | ノイマン問題 .....            | 632        |
| 6.4          | ラプラス作用素の固有値問題 .....     | 636        |
| <b>第 7 章</b> | <b>1 階の偏微分方程式</b>       | <b>639</b> |
| 7.1          | 1 階の偏微分方程式 .....        | 639        |
| 7.2          | ベクトル場と積分曲線 .....        | 639        |
| 7.3          | 1 階線形微分方程式の局所解 .....    | 642        |
| <b>第 8 章</b> | <b>1 階非線型偏微分方程式</b>     | <b>645</b> |
| 8.1          | 特性ベクトル場 .....           | 645        |

|                                     |            |
|-------------------------------------|------------|
| 8.2 特性曲線の方法による偏微分方程式の局所解の構成 .....   | 648        |
| <b>第 A 章 偏微分方程式を扱うための道具立て</b> ..... | <b>653</b> |
| A.1 記号と規約・多重指標 .....                | 653        |
| A.2 ライプニッツの公式と微分作用素 .....           | 654        |

# XIV 関数解析

[吉川 敦]

|  |            |
|--|------------|
| <b>第 1 章 まず距離空間から</b> .....              | <b>658</b> |
| 1.1 定義と簡単な例 .....                        | 658        |
| 1.2 完備性 .....                            | 660        |
| 1.3 ベールの範疇定理 .....                       | 663        |
| <b>第 2 章 バナッハ空間とヒルベルト空間</b> .....        | <b>666</b> |
| 2.1 ノルム空間 .....                          | 666        |
| 2.2 バナッハ空間 .....                         | 670        |
| 2.3 ミンコフスキー汎関数 .....                     | 674        |
| 2.4 ヒルベルト空間 .....                        | 675        |
| 2.5 直交射影 .....                           | 680        |
| <b>第 3 章 有界線形汎関数とハーン・バナッハの拡張定理</b> ..... | <b>685</b> |
| 3.1 有界線形汎関数 .....                        | 685        |
| 3.2 ハーン・バナッハの拡張定理 .....                  | 687        |
| 3.3 リース・フレシェの定理 .....                    | 691        |
| 3.4 双対空間 .....                           | 694        |
| 3.5 弱位相と汎弱位相 .....                       | 697        |
| 3.6 極集合 .....                            | 700        |
| <b>第 4 章 線形作用素とその応用</b> .....            | <b>701</b> |
| 4.1 線形作用素 .....                          | 701        |
| 4.2 作用素の強収束 .....                        | 706        |
| 4.3 閉グラフ定理 .....                         | 708        |
| 4.4 開写像定理と閉グラフ定理 .....                   | 712        |
| 4.5 共役作用素 .....                          | 713        |
| 4.6 閉値域作用素と閉値域定理 .....                   | 717        |
| 4.7 作用素のレゾルベント集合とスペクトル .....             | 719        |
| 4.8 若干の作用素解析 .....                       | 721        |
| 4.9 コンパクトな作用素 .....                      | 724        |

# XV 積分変換・積分方程式

[上村 豊]

|                             |            |
|-----------------------------|------------|
| <b>第1章 積分変換</b>             | <b>732</b> |
| 1.1 フーリエ変換 .....            | 732        |
| 1.2 ラプラス変換 .....            | 739        |
| <b>第2章 積分方程式</b>            | <b>746</b> |
| 2.1 ヴォルテラ積分方程式 .....        | 746        |
| 2.2 フレドホルム積分方程式 .....       | 754        |
| 2.3 リース・シャウダー理論と積分方程式 ..... | 765        |
| 2.4 合成積型積分方程式 .....         | 776        |
| <b>索引</b>                   | <b>787</b> |

