

目 次

まえがき	v
学習の手引き	vii
第 1 章 偏微分方程式の基礎	1
§ 1.1 基礎概念	1
(a) 偏微分方程式とは	1
(b) 線形方程式と非線形方程式	3
(c) 偏微分方程式の‘型’	5
§ 1.2 偏微分方程式の導出例	5
(a) 関数の不変性と偏微分方程式	5
(b) 包絡面の方程式	6
(c) 酔歩の極限としての拡散現象	7
(d) 1次元弾性体における疎密波	9
(e) 変分問題から導かれる偏微分方程式	10
§ 1.3 簡単な偏微分方程式の解法	15
(a) 定数係数 1 階方程式	15
(b) 簡単な 2 階方程式	17
§ 1.4 初期値問題と境界値問題	19
(a) 初期値問題	19
(b) 境界値問題	20
(c) 初期境界値問題	22
(d) 初期値問題の適切性	23
§ 1.5 フーリエの方法	25
(a) フーリエ級数の発見	25
(b) フーリエ級数	27
(c) フーリエ級数の収束	28

(d) 初期境界値問題	32
§ 1.6 1 階偏微分方程式の一般論	34
(a) 線形方程式と特性曲線	35
(b) 半線形の場合	36
(c) 初期値問題	37
(d) 準線形方程式	43
まとめ	46
演習問題	46
第 2 章 熱伝導と拡散	49
§ 2.1 方程式の導出	49
(a) 熱伝導方程式	49
(b) 高次元の熱伝導方程式	51
(c) 拡散方程式	53
(d) 初期条件と境界条件	54
§ 2.2 基本解	57
(a) δ 関数	57
(b) 基本解の定義	59
(c) 自己相似性を利用した基本解の計算	61
(d) 初期境界値問題の基本解	64
§ 2.3 初期値問題と初期境界値問題	65
(a) 初期値問題	65
(b) 初期境界値問題	68
(c) 非斉次方程式	72
(d) 平滑化作用	73
§ 2.4 最大値原理とその応用	77
(a) 最大値原理	77
(b) 比較定理	79
(c) 初期境界値問題の解の一意性	80
まとめ	81
演習問題	81

第 3 章	ラプラスの方程式とポアソンの方程式	83
§ 3.1	ラプラスの方程式とその背景	83
(a)	ラプラスの方程式と調和関数	83
(b)	ベクトル場のポテンシャル	84
(c)	コーシー–リーマンの方程式	89
(d)	流体の運動とラプラスの方程式	90
(e)	重力ポテンシャルと静電ポテンシャル	92
§ 3.2	極座標による表現	97
(a)	ラプラス演算子の極座標表示	97
(b)	球面調和関数	102
§ 3.3	調和関数の性質	104
(a)	劣調和関数と優調和関数	104
(b)	最大値原理	105
(c)	球面平均の定理	107
(d)	広義の劣調和関数	113
(e)	等角写像とケルヴィン変換	115
§ 3.4	ポアソンの方程式	118
(a)	ラプラス演算子の基本解	119
(b)	グリーンの定理	119
(c)	対数ポテンシャルとニュートン・ポテンシャル	122
§ 3.5	境界値問題	126
(a)	ディリクレ問題とノイマン問題	126
(b)	グリーン関数	130
(c)	鏡像原理とポアソンの公式	132
(d)	除去可能な特異点	134
§ 3.6	固有値問題	137
(a)	矩形領域の場合	139
(b)	円板領域の場合	141
	ま と め	143
	演習問題	143

第 4 章 波と振動の方程式	147
§ 4.1 波動方程式の初期値問題	147
(a) 1次元波動方程式	148
(b) 3次元波動方程式とホイヘンスの原理	151
(c) 2次元波動方程式	153
(d) 基本解	155
(e) 平面波と球面波	156
(f) 依存領域	158
(g) 非斉次方程式	162
§ 4.2 境界のある領域上の波動方程式	163
(a) 境界条件	163
(b) 半無限区間上の波動方程式	164
(c) 基本解	165
(d) 依存領域と解のエネルギー	167
(e) 固有振動への分解	169
§ 4.3 分散性の波と非分散性の波	172
まとめ	177
演習問題	177
第 5 章 超関数と広義解	179
§ 5.1 テスト関数と観測値	179
§ 5.2 連続関数の導関数	181
§ 5.3 \mathbb{R} 上の超関数	183
§ 5.4 多変数の場合	187
§ 5.5 微分方程式の広義解	189
(a) ポアソンの方程式の広義解	189
(b) 波動方程式の広義解	191
(c) 衝撃波と広義解	192
まとめ	195
演習問題	196

付録 A	2 階偏微分方程式の分類	197
§ A.1	2 階線形方程式の分類	197
§ A.2	非線形偏微分方程式の型	199
§ A.3	複数の型が混在する方程式	200
付録 B	フーリエ変換	201
§ B.1	無限区間への移行	201
§ B.2	基本的な性質	203
§ B.3	初期値問題への応用	204
付録 C	ラプラス-ベルトラミ作用素	207
§ C.1	曲面上の関数の勾配	207
§ C.2	ラプラス-ベルトラミ作用素	208
§ C.3	ラプラシアン of 球座標表示	210
現代数学への展望		213
参 考 書		223
問 解 答		225
演習問題解答		228
索 引		237