

目 次

1. 微分方程式入門	1
1.1 ニュートン力学と微分方程式	1
1.1.1 運動方程式の求積と解の一意性	2
1.1.2 ケプラー問題から3体問題へ	4
1.2 ベクトル場と相空間	10
1.3 局所解の存在定理	14
1.3.1 準備	14
1.3.2 初期値問題の解の存在と一意性	17
1.4 大域解	22
1.4.1 極大延長解	22
1.4.2 大域解の存在定理	27
1.5 第1積分	29
1.5.1 第1積分と曲面上のベクトル場	29
1.5.2 エネルギー保存則と解の挙動	31
1.6 線形微分方程式	35
1.6.1 重ね合わせの原理	35
1.6.2 定数変化法	39
1.7 定数係数線形微分方程式	41
1.7.1 行列の指数関数	41
1.7.2 解の求積と実ジョルダン標準形	44
1.7.3 格子振動	49
練習問題	51

2. 微分方程式の定義する流れ	55
2.1 解の初期値に関する従属性定理と力学系	55
2.1.1 解の初期値とパラメータに関する連続性	55
2.1.2 解の初期値とパラメータに関する微分可能性	60
2.1.3 流れの保測性と散逸性	64
2.2 応 用	66
2.2.1 ベクトル場の第1積分と直線化	66
2.2.2 1階偏微分方程式の解の存在定理	69
2.3 解の安定性と漸近挙動	73
2.3.1 平衡解の安定性	73
2.3.2 安定(不安定)多様体	79
2.4 ポアンカレ写像と離散力学系	81
2.4.1 時間に周期的に依存するベクトル場と離散力学系	81
2.4.2 ポアンカレ写像	87
2.5 ポアンカレの再帰定理	91
練習問題	93
3. ユークリッド空間上の古典力学	95
3.1 はじめに	95
3.2 変 分 法	97
3.2.1 変分問題	97
3.2.2 変分問題のオイラー-ラグランジュ方程式	99
3.3 ニュートン力学のラグランジュ形式と変分原理	106
3.4 ハミルトン系	109
3.4.1 ラグランジュ系からハミルトン系へ	109
3.4.2 ハミルトン系に対する変分原理	113
3.4.3 ハミルトン-ヤコビ方程式	115
3.5 正 準 変 換	119
3.5.1 座標変換としての正準変換	119
3.5.2 微分形式	121

3.5.3 正準形式	128
3.6 ハミルトン系の流れと積分不変式	130
3.7 微 小 振 動	135
3.7.1 線形ハミルトン系	135
3.7.2 調和振動子の流れ	138
3.8 系の対称性と第1積分	141
3.8.1 ネーターの定理	141
3.8.2 ハミルトン系に対する対称性とポアソン括弧式	144
3.9 正準変換の母関数表示	146
3.10 ハミルトン系の求積	150
練習問題	155
4. 多様体上の古典力学	158
4.1 多 様 体	158
4.1.1 束縛運動と多様体	158
4.1.2 接空間と多様体上のベクトル場	162
4.2 接バンドル上のラグランジュ系	167
4.2.1 束縛運動のラグランジュ方程式	167
4.2.2 例	172
4.2.3 ラグランジュ系と変分原理	176
4.3 余接バンドル上のハミルトン系	178
4.3.1 ラグランジュ系からハミルトン系へ	178
4.3.2 正則なエネルギー曲面上のハミルトンの流れ	182
4.4 シンプレクティック多様体上のハミルトン系	188
4.4.1 シンプレクティック多様体	188
4.4.2 ハミルトンベクトル場とその流れ	191
4.5 グルプの定理の証明	193
練習問題	196

5. 可積分系とその摂動	199
5.1 可換なベクトル場とその流れ	199
5.2 ポアソン括弧式	203
5.2.1 ハミルトンベクトル場の可換性とポアソン括弧式	203
5.2.2 ハミルトンベクトル場の標準形	205
5.3 完全積分可能系	207
5.3.1 定義と例	207
5.3.2 アーノルド-ヨストの定理	211
5.3.3 作用-角変数	213
5.4 アーノルド-ヨストの定理の証明	216
5.5 可積分系の摂動	223
5.5.1 制限3体問題	223
5.5.2 摂動論	226
5.6 バーコフ標準形	229
5.7 ツイスト写像と不動点定理	233
5.8 コルモゴロフ-アーノルド-モーザー理論	238
5.8.1 ハミルトン系の準周期解とKAM定理	238
5.8.2 KAM定理の応用	245
5.8.3 KAMトーラスの崩壊とカオス	247
練習問題	249
問題の解答	250
練習問題解答	253
参考文献	269
索引	275