

# 目 次

|                      |    |
|----------------------|----|
| 1. 微分方程式入門           | 1  |
| 1.1 ニュートン力学と微分方程式    | 1  |
| 1.1.1 運動方程式の求積と解の一意性 | 2  |
| 1.1.2 ケプラー問題から3体問題へ  | 4  |
| 1.2 ベクトル場と相空間        | 10 |
| 1.3 局所解の存在定理         | 14 |
| 1.3.1 準備             | 14 |
| 1.3.2 初期値問題の解の存在と一意性 | 17 |
| 1.4 大域解              | 22 |
| 1.4.1 極大延長解          | 22 |
| 1.4.2 大域解の存在定理       | 27 |
| 1.5 第1積分             | 29 |
| 1.5.1 第1積分と曲面上のベクトル場 | 29 |
| 1.5.2 エネルギー保存則と解の挙動  | 31 |
| 1.6 線形微分方程式          | 35 |
| 1.6.1 重ね合わせの原理       | 35 |
| 1.6.2 定数変化法          | 39 |
| 1.7 定数係数線形微分方程式      | 41 |
| 1.7.1 行列の指数関数        | 41 |
| 1.7.2 解の求積と実ジョルダン標準形 | 44 |
| 1.7.3 格子振動           | 49 |
| 練習問題                 | 51 |

|                              |           |
|------------------------------|-----------|
| <b>2. 微分方程式の定義する流れ</b>       | <b>55</b> |
| 2.1 解の初期値に関する従属性定理と力学系       | 55        |
| 2.1.1 解の初期値とパラメータに関する連続性     | 55        |
| 2.1.2 解の初期値とパラメータに関する微分可能性   | 60        |
| 2.1.3 流れの保測性と散逸性             | 64        |
| 2.2 応 用                      | 66        |
| 2.2.1 ベクトル場の第1積分と直線化         | 66        |
| 2.2.2 1階偏微分方程式の解の存在定理        | 69        |
| 2.3 解の安定性と漸近挙動               | 73        |
| 2.3.1 平衡解の安定性                | 73        |
| 2.3.2 安定(不安定)多様体             | 79        |
| 2.4 ポアンカレ写像と離散力学系            | 81        |
| 2.4.1 時間に周期的に依存するベクトル場と離散力学系 | 81        |
| 2.4.2 ポアンカレ写像                | 87        |
| 2.5 ポアンカレの再帰定理               | 91        |
| 練習問題                         | 93        |
| <b>3. ユークリッド空間上の古典力学</b>     | <b>95</b> |
| 3.1 はじめに                     | 95        |
| 3.2 変 分 法                    | 97        |
| 3.2.1 変分問題                   | 97        |
| 3.2.2 変分問題のオイラー-ラグランジュ方程式    | 99        |
| 3.3 ニュートン力学のラグランジュ形式と変分原理    | 106       |
| 3.4 ハミルトン系                   | 109       |
| 3.4.1 ラグランジュ系からハミルトン系へ       | 109       |
| 3.4.2 ハミルトン系に対する変分原理         | 113       |
| 3.4.3 ハミルトン-ヤコビ方程式           | 115       |
| 3.5 正 準 変 換                  | 119       |
| 3.5.1 座標変換としての正準変換           | 119       |
| 3.5.2 微分形式                   | 121       |

|                             |            |
|-----------------------------|------------|
| 3.5.3 正準形式                  | 128        |
| 3.6 ハミルトン系の流れと積分不変式         | 130        |
| 3.7 微 小 振 動                 | 135        |
| 3.7.1 線形ハミルトン系              | 135        |
| 3.7.2 調和振動子の流れ              | 138        |
| 3.8 系の対称性と第1積分              | 141        |
| 3.8.1 ネーターの定理               | 141        |
| 3.8.2 ハミルトン系に対する対称性とポアソン括弧式 | 144        |
| 3.9 正準変換の母関数表示              | 146        |
| 3.10 ハミルトン系の求積              | 150        |
| 練習問題                        | 155        |
| <b>4. 多様体上の古典力学</b>         | <b>158</b> |
| 4.1 多 様 体                   | 158        |
| 4.1.1 束縛運動と多様体              | 158        |
| 4.1.2 接空間と多様体上のベクトル場        | 162        |
| 4.2 接バンドル上のラグランジュ系          | 167        |
| 4.2.1 束縛運動のラグランジュ方程式        | 167        |
| 4.2.2 例                     | 172        |
| 4.2.3 ラグランジュ系と変分原理          | 176        |
| 4.3 余接バンドル上のハミルトン系          | 178        |
| 4.3.1 ラグランジュ系からハミルトン系へ      | 178        |
| 4.3.2 正則なエネルギー曲面上のハミルトンの流れ  | 182        |
| 4.4 シンプレクティック多様体上のハミルトン系    | 188        |
| 4.4.1 シンプレクティック多様体          | 188        |
| 4.4.2 ハミルトンベクトル場とその流れ       | 191        |
| 4.5 グルプの定理の証明               | 193        |
| 練習問題                        | 196        |

|                              |            |
|------------------------------|------------|
| <b>5. 可積分系とその摂動</b>          | <b>199</b> |
| 5.1 可換なベクトル場とその流れ            | 199        |
| 5.2 ポアソン括弧式                  | 203        |
| 5.2.1 ハミルトンベクトル場の可換性とポアソン括弧式 | 203        |
| 5.2.2 ハミルトンベクトル場の標準形         | 205        |
| 5.3 完全積分可能系                  | 207        |
| 5.3.1 定義と例                   | 207        |
| 5.3.2 アーノルド-ヨストの定理           | 211        |
| 5.3.3 作用-角変数                 | 213        |
| 5.4 アーノルド-ヨストの定理の証明          | 216        |
| 5.5 可積分系の摂動                  | 223        |
| 5.5.1 制限3体問題                 | 223        |
| 5.5.2 摂動論                    | 226        |
| 5.6 バーコフ標準形                  | 229        |
| 5.7 ツイスト写像と不動点定理             | 233        |
| 5.8 コルモゴロフ-アーノルド-モザー理論       | 238        |
| 5.8.1 ハミルトン系の準周期解とKAM定理      | 238        |
| 5.8.2 KAM定理の応用               | 245        |
| 5.8.3 KAMトーラスの崩壊とカオス         | 247        |
| 練習問題                         | 249        |
| <br>                         |            |
| <b>問題の解答</b>                 | <b>250</b> |
| <b>練習問題解答</b>                | <b>253</b> |
| <b>参考文献</b>                  | <b>269</b> |
| <b>索引</b>                    | <b>275</b> |