

目 次

初版への序文

第2, 第3および第4版への序文

本書の使い方

数学とは何か

第 I 章 自然数	1
序 論	1
§1 整数の計算	2
1. 算術の法則 2. 整数の表現 3. 10進法以外の記数法での計算	
§2 数の無限性, 数学的帰納法	10
1. 数学的帰納法の原理 2. 等差級数 3. 等比級数 4. 最初の n 個の平方数の和 5. 重要な不等式 6. 二項定理 7. 数学的帰 納法に関する注意の追加	
第 I 章への補足 整数論	23
序 論	23
§1 素 数	23
1. 基本的事実 2. 素数の分布 a. 素数を作り出す諸公式 b. 等差 級数に含まれる素数 c. 素数定理 d. 素数に関する二つの未解決の 問題	
§2 合 同 式	34
1. 一般的概念 2. Fermat の定理 3. 平方剰余	
§3 Pythagoras 数と Fermat の最後定理	44
§4 Euclid の算法	46
1. 一般論 2. 算術の基本定理への応用 3. Euler の φ 函数, 再び Fermat の定理について 4. 連分数, Diophantus の方程式	

第Ⅱ章 数学における数系	57
序 論	57
§1 有 理 数	57
1. 測定の道具としての有理数 2. 有理数の内在的必然性. 一般化の原理 3. 有理数の幾何学的解釈	
§2 通約不可能な線分, 無理数, および極限の概念	64
1. 序論 2. 10進小数, 無限小数 3. 極限, 無限等比級数	
4. 有理数と循環小数 5. 入れ子になった区間による無理数の一般的定義 6. 無理数を定義する別法, Dedekind の切断	
§3 解析幾何学に関する注意	79
1. 基本原理 2. 直線および曲線の方程式	
§4 無限の数学的解析	84
1. 基本概念 2. 有理数の可算性と連続体の非可算性 3. Cantor “濃度” 4. 間接証明法 5. 無限の逆説 6. 数学の基礎	
§5 複 素 数	96
1. 複素数の起源 2. 複素数の幾何学的解釈 3. De Moivre の公式と1の n 乗根 4. 代数学の基本定理	
§6 代数的数と超越数	111
1. 定義と存在 2. Liouville の定理および超越数の構成	
第Ⅱ章への補足 集合の代数	117
1. 一般理論 2. 数理論理学への応用 3. 確率論への応用	
第Ⅲ章 作図法, 数体の代数	126
序 論	126
第Ⅰ部 作図不可能の証明と代数	129
§1 基本的な作図	129
1. 体と平方根の作図 2. 正多角形 3. Apollonius の問題	
§2 作図可能な数と数体	136
1. 一般理論 2. 作図可能な数はすべて代数的である	

§ 3	三つのギリシャの問題の解の不可能性	145
	1. 立方体の倍積 2. 3次方程式に関する一つの定理 3. 角の3等分 4. 正7角形 5. 円の正方形化の問題に関する注意	
第II部	作図を行なうための種々の方法	151
§ 4	幾何学的諸変換. 反転	151
	1. 一般的注意 2. 反転の性質 3. 逆点の作図 4. コンパスだけ を用いた線分の2等分法と円の中心の求め方	
§ 5	他の器具を使用する作図. コンパスだけを使用する Mascheroni の作図	157
	1. 立方体の倍積の古典的作図 2. コンパスだけを使うという制限 3. 特殊な機構の器具を用いた作図. 機械で描く曲線. サイクロイド 4. リンケージ. Peaucellier および Hart の反転器	
§ 6	反転およびその応用の続き	169
	1. 角の不変性. 円の族 2. Apollonius の問題への応用 3. 反射 の繰返し	
第IV章	射影幾何学. 公理論. 非 Euclid 幾何学	175
§ 1	序論	175
	1. 幾何学的性質の分類. 変換のもとでの不変性 2. 射影変換	
§ 2	基本概念	178
	1. 射影変換群 2. Desargues の定理	
§ 3	複比	182
	1. 定義および不変性の証明 2. 完全4辺形への応用	
§ 4	平行性と無限遠	189
	1. “理想的な点”としての無限遠点 2. 理想的な要素と射影 3. 無 限遠要素を含む複比	
§ 5	応用	195
	1. 予備的注意 2. 平面における Desargues の定理の証明 3. Pascal の定理 4. Brianchon の定理 5. 双対性に関する注意	
§ 6	解析的表現	201

1. 緒言	2. 同次座標, 双対性の代数的基礎	
§ 7	直線定木だけでの作図問題	206
§ 8	円錐曲線と2次曲面	208
	1. 円錐曲線の初等的な計量幾何学	
	2. 円錐曲線の射影的性質	
	3. 線曲線としての円錐曲線	
	4. 円錐曲線に関する Pascal と Brianchon の一般定理	
	5. 双曲面	
§ 9	公理論と非 Euclid 幾何学	222
	1. 公理的方法	
	2. 双曲的非 Euclid 幾何学	
	3. 幾何学と現実	
	4. Poincaré の模型	
	5. 楕円の幾何学 すなわち Riemann 幾何学	
付 録	4次元以上の幾何学	236
	1. 序論	
	2. 解析的な取り上げ方	
	3. 幾何学的あるいは組合せ論的 な取り上げ方	
第V章	位相幾何学	243
序 論		243
§ 1	多面体に対する Euler の公式	244
§ 2	図形の位相的諸性質	248
	1. 位相的性質	
	2. 連結性	
§ 3	位相幾何学の定理のいくつかの別例	252
	1. Jordan の曲線定理	
	2. 4色問題	
	3. 次元の概念	
	4. 不動点 定理	
	5. 結び糸	
§ 4	面の位相的分類	264
	1. 面の示性数	
	2. 面の Euler 標数	
	3. 単側面	
付 録		271
	1. 5色定理	
	2. 多角形に対する Jordan の曲線定理	
	3. 代数学の基 本定理	
第VI章	函数と極限	280
序 論		280
§ 1	変数と函数	281

1. 定義と例題	2. 角を弧度で測ること	3. 函数のグラフ. 逆函数	
4. 合成函数	5. 連続性	6. 多変数の函数	7. 函数と変換
§ 2 極限			297
1. 数列 a_n の極限	2. 単調数列	3. Euler の数 e	4. π という数
5. 連分数			
§ 3 連続的に近づくときの極限			312
1. 序論. 一般的定義	2. 極限概念についての注意	3. $(\sin x)/x$ の極限	
4. $x \rightarrow \infty$ のときの極限			
§ 4 連続性の厳密な定義			319
§ 5 連続函数に関する二つの基本的な定理			322
1. Bolzano の定理	2. Bolzano の定理の証明	3. 極値に関する Weierstrass の定理	
4. 数列に関する定理. コンパクトな集合			
§ 6 Bolzano の定理の二三の応用例			327
1. 幾何学的な応用	2. 力学の問題への応用		
第VI章への補足 極限と連続性の例題の追加			332
§ 1 極限の例			332
1. 一般的注意	2. q^n の極限	3. $\sqrt[p]{p}$ の極限	4. 連続函数の極限としての不連続函数
5. 反復による極限			
§ 2 連続性の例			338
第VII章 最大と最小			340
序論			340
§ 1 初等幾何学における諸問題			341
1. 2辺を与えられた3角形の最大の面積	2. Heronの定理. 光線の極値性		3. 3角形の問題への応用
4. 楕円と双曲線の接線の性質. 対応する極値性	5. 与えられた曲線への距離の極値		
§ 2 極値問題の基礎をなす一般原理			350
1. 原理	2. 例題		
§ 3 停留点および微分法			352
1. 極値と停留値	2. 多変数函数の最大と最小. 鞍点	3. 極小極	

大点と位相幾何学	4. 1点から曲面までの距離	
§ 4	Schwarz の 3 角 形 の 問 題	357
	1. Schwarz の 証 明 2. 別 の 証 明 3. 鈍 角 3 角 形 4. 光 線 の 作 る 3 角 形 5. 反 射 の 問 題 に 関 す る 注 意 と エ ル ゴ ー ド 運 動	
§ 5	Steiner の 問 題	365
	1. 問 題 と そ の 解 2. 種 々 の 場 合 の 解 析 3. 補 足 的 な 問 題 4. 注 意 と 演 習 問 題 5. 道 路 網 問 題 へ の 一 般 化	
§ 6	極 値 と 不 等 式	372
	1. 2 個 の 正 の 量 の 算 術 平 均 と 幾 何 平 均 2. n 変 数 へ の 拡 張 3. 最 小 二 乗 法	
§ 7	極 値 の 存 在, Dirichlet の 原 理	377
	1. 一 般 的 注 意 2. 実 例 3. 初 等 的 な 極 値 問 題 4. 高 等 な 場 合 の 困 難	
§ 8	等 周 問 題	384
§ 9	境 界 条 件 の 有 る 極 値 問 題. Steiner の 問 題 と 等 周 問 題 と の 関 係	387
§ 10	変 分 法	390
	1. 序 論 2. 変 分 法. 光 学 に お け る Fermat の 原 理 3. 最 速 降 下 線 問 題 の Bernoulli に よ る 取 扱 4. 球 面 上 の 測 地 線. 測 地 線 と 極 大 極 小	
§ 11	最 小 問 題 の 実 験 的 解 法. 石 鹼 膜 の 実 験	396
	1. 序 論 2. 石 鹼 膜 の 実 験 3. Plateau の 問 題 に つ い て の 新 し い 実 験 4. 他 の 数 学 的 問 題 の 実 験 的 解 法	
第 VIII 章	微 分 積 分 学	408
序 論		408
§ 1	積 分	410
	1. 極 限 と し て の 面 積 2. 積 分 3. 積 分 の 概 念 に 対 す る 一 般 的 注 意. 一 般 的 な 定 義 4. 積 分 の 例. x^r の 積 分 5. “積 分 法” の 諸 法 則	
§ 2	導 函 数	425
	1. 傾 斜 と し て の 導 函 数 2. 極 限 と し て の 導 函 数 3. 例 4. 三 角 函 数 の 導 函 数 5. 微 分 と 連 続 性 6. 導 函 数 と 速 度. 第 2 階 の 導 函	

数と加速度 7. 第2階導函数の幾何学的意味 8. 極大および極小

§3	微分の技術	438
§4	Leibniz の記号と“無限小”	444
§5	微分積分学の基本定理	447
	1. 基本定理 2. 応用の手始め. x' , $\cos x$, $\sin x$ の積分. $\text{Arc tan } x$	
	3. π に対する Leibniz の公式	
§6	指数函数および対数	454
	1. 対数の定義および性質. Euler の数 e 2. 指数函数 3. e^x , a^x , x^s の微分公式	
	4. e , e^x , および $\log x$ を極限值として表わす陽な公式	
	5. 対数に対する無限級数. 数値計算	
§7	微分方程式	466
	1. 定義 2. 指数函数の微分方程式. 放射性崩壊. 生長の法則. 複利	
	3. 他の例. 単振動 4. Newton の力学の法則	

第VIII章への補足474

§1	原理的なこと	474
	1. 微分可能性 2. 積分 3. 積分概念の他の応用. 仕事. 長さ	
§2	大きさの位数	481
	1. 指数函数と x のべき 2. $\log(n!)$ の大きさの位数	
§3	無限級数および無限乗積	484
	1. 函数の無限級数 2. Euler の公式, $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ 3. 調和級数とゼータ函数. 正弦函数に対する Euler の積	
§4	素数定理の統計的方法による求め方	495

付録 補足, 問題, および演習問題499

算術と代数	499
解析幾何学	501
作図問題	507
射影幾何学および非 Euclid 幾何学	508
位相幾何学	509

函数, 極限, および連続	512
最大および最小	513
微分積分学	516
積分の技術	518
もっと学びたい人のための参考書	524
監訳者あとがき	529
索引	533

