

目次

まえがき

第 1 章	関数解析の舞台と主役	1
§ 1.1	弦のつり合いの問題(線形性)	1
§ 1.2	弦のつり合いの問題(安定性と適正さ)	5
§ 1.3	積分作用素と積分方程式	7
§ 1.4	ひとつの源: 変分法	9
§ 1.5	作用素論のすすめ	10
(a)	作用素方程式と固有値問題	11
(b)	作用素の関数	14
第 2 章	ノルムと内積	21
§ 2.1	線形空間の定義と例	21
§ 2.2	線形空間に関する用語	26
(a)	線形結合	26
(b)	凸集合	29
§ 2.3	関数空間におけるノルム	32
§ 2.4	ノルム空間での諸概念	38
(a)	ノルムと距離	38
(b)	ノルム空間における球と有界集合	39
(c)	ノルムと収束	40
(d)	ノルムの連続性	43
(e)	同値なノルム	44
(f)	ノルム空間での位相	45
(g)	関数空間における稠密性と近似定理	48

(h)	可分な関数空間	50
§ 2.5	関数空間における内積	51
(a)	内積の公理	51
(b)	内積から導かれるノルム	54
(c)	内積空間での収束	56
(d)	内積と直交性	57
(e)	シュミットの直交化法	57
§ 2.6	第 2 章への補足	58
(a)	平均収束と各点収束	58
(b)	測度 0 の集合	59
	演習問題	61
第 3 章	バナッハ空間, とくにヒルベルト空間	65
§ 3.1	バナッハ空間, ヒルベルト空間の定義	65
§ 3.2	基礎的なソボレフ空間	69
(a)	関数空間 $H^1(a, b)$	69
(b)	関数空間 $H^1(\Omega)$	72
§ 3.3	完備性に基づく基本の定理	77
(a)	級数と完備性	77
(b)	縮小写像の不動点定理	78
(c)	関数空間の値をとる関数の微積分	80
§ 3.4	第 3 章への補足	83
(a)	広義一様収束と Fréchet 空間	83
(b)	急減少関数の空間 S	84
(c)	ソボレフの埋蔵定理	86
	演習問題	87
第 4 章	線形作用素の基本	89
§ 4.1	線形作用素の定義	89
§ 4.2	有界線形作用素	91
(a)	連続性と有界性	91

(b)	有界な線形作用素の定義域の拡張	92
(c)	作用素のノルムと作用素の空間 $\mathcal{L}(X, Y)$	93
(d)	作用素の空間 $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$	95
(e)	作用素のベキ級数	96
§ 4.3	有界作用素の例	98
(a)	有限次元空間における作用素	99
(b)	積分作用素(1)	99
(c)	Hilbert–Schmidt 型積分作用素	101
(d)	たたみ込み作用素	101
(e)	掛け算作用素	102
(f)	ずらし作用素	102
	演習問題	103
第 5 章	射影定理とそれからの展開	105
§ 5.1	射影定理	105
§ 5.2	完全正規直交系	109
§ 5.3	正規直交系に関する補足	112
(a)	正規直交系の存在	112
(b)	同型なヒルベルト空間	113
(c)	可分でないヒルベルト空間の基底	113
§ 5.4	Riesz の表現定理	114
§ 5.5	境界値問題の弱解	116
(a)	Riesz の定理の応用例	116
(b)	ノイマン境界条件	119
(c)	変分法と境界値問題との関連	121
§ 5.6	ヒルベルト空間の共役作用素	122
(a)	共役作用素の定義と例	123
(b)	共役作用素に関する公式	125
(c)	自己共役作用素	126
(d)	ユニタリ作用素	129

(e) 非有界作用素の共役作用素	132
§5.7 第5章への補足	135
(a) 線形汎関数の拡張に関する Hahn-Banach の定理	135
(b) 共役空間の具体的な表現	137
(c) 反射的なバナッハ空間	138
演習問題	139
第6章 固有値からスペクトルへ	141
§6.1 スペクトルとリゾルベントの概念	142
§6.2 リゾルベントの関数論的な扱い	146
§6.3 作用素のクラスとスペクトル	152
(a) Volterra 型積分作用素	152
(b) ユニタリ作用素	154
(c) 自己共役作用素	156
演習問題	161
第7章 弱収束と完全連続作用素	163
§7.1 ヒルベルト空間における弱収束	163
§7.2 完全連続作用素の概念	171
§7.3 完全連続作用素に関する基本事項	174
§7.4 $(z - A)u = f$ の交代定理	176
§7.5 第7章への補足	179
(a) 一様有界性の定理	179
(b) 定理 7.7 の証明	180
(c) 一般のバナッハ空間における弱収束	181
演習問題	181
第8章 古典的な固有値問題の関数解析	183
§8.1 完全連続な作用素の固有値問題	183
(a) 固有値の離散性	183
(b) 自己共役な完全連続作用素の固有値問題	184
§8.2 $-\Delta$ の固有値問題	189

§8.3 固有値問題における変分原理	194
(a) Rayleigh の原理	194
(b) ミニ・マックス原理	196
演習問題	197
第9章 発展方程式への登り口	199
§9.1 初期値問題と作用素の半群	200
§9.2 半群理論の紹介	208
参考書	213
索引	217