



# 目 次

—上 巻—

## 偏微分方程式と計算機への序論

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| 1. 偏微分方程式の分類に関する 2, 3 の注意 ..... | 1  |
| 2. 連立方程式と単独の方程式 .....           | 7  |
| 3. デジタル型計算設備の諸性質 .....          | 8  |
| 3.1. 卓 上 計 算 .....              | 9  |
| 3.2. パンチ・カード計算機 .....           | 11 |
| 3.3. 自動デジタル型計算機 .....           | 11 |
| 3.4. 偏微分方程式の諸要求 .....           | 14 |

## 1. 2 独立変数の双曲型方程式

|                                                   |    |
|---------------------------------------------------|----|
| 4. 方程式 $u_{tt} - u_{xx} = 0$ への 1 つの差分近似 .....    | 17 |
| 4.1. $u_{tt} - u_{xx} = 0$ に対する最も簡単な初期値問題の解 ..... | 17 |
| 4.2. 1 つの近似差分方程式 .....                            | 18 |
| 4.3. $\lambda < 1$ に対する差分方程式の陽的解 .....            | 21 |
| 4.4. 有限な Fourier 級数による差分方程式の解 .....               | 26 |
| 4.5. 微分問題の解への収束 .....                             | 27 |
| 4.6. 安 定 性 .....                                  | 30 |
| 5. さらに安定性の概念について .....                            | 33 |
| 5.1. 定義と簡単な 2, 3 の例 .....                         | 33 |
| 5.2. 波動方程式への応用 .....                              | 40 |
| 6. 双曲型連立偏微分方程式とそれらの特性曲線 .....                     | 43 |
| 6.1. 標 準 形 .....                                  | 43 |
| 6.2. 例 .....                                      | 47 |
| 6.3. $n=2$ のときの標準的な連立偏微分方程式 .....                 | 49 |

|                                             |     |
|---------------------------------------------|-----|
| 6.4. 初期値問題に関する諸注意 .....                     | 51  |
| 7. 連立あるいは仮線型の双曲型方程式のための<br>差分法による近似解法 ..... | 56  |
| 7.1. 計算過程の記述 .....                          | 56  |
| 7.2. 差分近似の収束を証明するための一般模型 .....              | 62  |
| 7.3. 双曲型連立方程式に対する差分模型の収束 .....              | 66  |
| 7.4. 曲線状格子における差分 .....                      | 71  |
| 7.5. 丸めの誤差 .....                            | 72  |
| 8. 特性曲線にそった数値解法 .....                       | 74  |
| 8.1. Massau の方法 .....                       | 74  |
| 8.2. 2階の仮線型方程式 .....                        | 76  |
| 8.3. $n$ 個の従属変数のときの他の数値解法 .....             | 77  |
| 9. Adams の方法による数値解法 .....                   | 79  |
| 10. 衝 撃 波 .....                             | 83  |
| 10.1. 衝撃波の概念 .....                          | 83  |
| 10.2. 衝撃波を含む諸問題の数値解法 .....                  | 86  |
| 10.3. 見せかけの粘性項による衝撃波面の計算 .....              | 90  |
| 10.4. 粘性流の真の方程式の解法 .....                    | 96  |
| 10.5. Lax の差分解法 .....                       | 98  |
| <br><b>2. 放 物 型 方 程 式</b>                   |     |
| 11. 最も簡単な熱の流れの問題 .....                      | 102 |
| 11.1. 準備的諸注意 .....                          | 102 |
| 11.2. 初期値問題の解 .....                         | 103 |
| 12. 最も簡単な差分近似 .....                         | 106 |
| 12.1. 安定条件 .....                            | 106 |
| 12.2. 収束と離散化誤差 .....                        | 110 |
| 13. 有限区間における線型問題 .....                      | 114 |
| 13.1. 微分問題 .....                            | 114 |
| 13.2. 差分近似 .....                            | 116 |

|       |                                |     |
|-------|--------------------------------|-----|
| 13.3. | 1つの陰伏的な方法                      | 118 |
| 13.4. | 陰伏的な差分方程式の解                    | 120 |
| 13.5. | 陰伏法の収束                         | 122 |
| 14.   | 2変数のもっと一般的な線型放物型諸問題：陽的諸方法      | 125 |
| 14.1. | 形式的な陽的差分近似                     | 125 |
| 14.2. | 重畳による非斉次な線型差分問題の解              | 126 |
| 14.3. | 正型の差分式の有界性と安定性の諸性質             | 129 |
| 14.4. | John の有界性の条件                   | 132 |
| 15.   | さらに線型問題に関する陽的および陰伏的諸方法について     | 138 |
| 15.1. | 陰伏的諸方法へのもっと一般的な近づき方            | 138 |
| 15.2. | 2つ以上の格子線を使用する陽的諸方法             | 145 |
| 15.3. | 高階の諸問題                         | 152 |
| 16.   | 収束の他の諸定義. Lax と Richtmyer の理論  | 155 |
| 16.1. | 函数解析に関する2, 3の注意                | 155 |
| 16.2. | Lax と Richtmyer の意味における収束性と安定性 | 157 |
| 17.   | 非線型の諸問題                        | 159 |
| 17.1. | 半線型方程式                         | 159 |
| 17.2. | 他の放物型諸問題の例                     | 161 |

### 3. 楕円型方程式

|       |                        |     |
|-------|------------------------|-----|
| 18.   | 楕円型偏微分方程式をと伴う2, 3の数値問題 | 169 |
| 18.1. | 一般の Laplace の境界値問題     | 170 |
| 18.2. | 排水問題                   | 172 |
| 18.3. | 石油の流れの問題               | 174 |
| 18.4. | 応力問題                   | 177 |
| 18.5. | 境界層の問題                 | 178 |
| 18.6. | 膜の固有値問題                | 179 |
| 18.7. | 簡単な原子炉の問題              | 181 |
| 18.8. | 重調和固有値問題               | 182 |
| 18.9. | Plateau の問題            | 183 |

|                                             |     |
|---------------------------------------------|-----|
| 18.10. 波動方程式に対する固有値問題 .....                 | 184 |
| 19. 楕円型偏微分方程式論からの選ばれた諸結果 .....              | 184 |
| 19.1. 変分法的定式化 .....                         | 184 |
| 19.2. ある固有値問題の変分法的定式化 .....                 | 192 |
| 19.3. 自己共役性 .....                           | 194 |
| 19.4. 内部境界条件 .....                          | 197 |
| 19.5. 最大原理 .....                            | 202 |
| 20. 楕円型差分方程式問題の形成 .....                     | 203 |
| 20.1. 離散化とそれによって生ずる諸問題 .....                | 203 |
| 20.2. 線の方法 .....                            | 206 |
| 20.3. 離散化される諸問題の型 .....                     | 207 |
| 20.4. 不規則な格子網 .....                         | 208 |
| 20.5. 差分方程式を設定する変分的方法 .....                 | 212 |
| 20.6. 正方格子網：偏微分係数の近似 .....                  | 215 |
| 20.7. 正方格子網： $L(u)$ と $\Delta u$ との近似 ..... | 221 |
| 20.8. 原子炉拡散方程式への変分法の応用 .....                | 228 |
| 20.9. Dirichlet の境界条件の取り扱い .....            | 231 |
| 20.10. 法線方向の微分係数の境界条件 .....                 | 235 |
| 20.11. 特異点と自由境界 .....                       | 239 |
| 21. 楕円型差分方程式を解くことについての古典的理論 .....           | 239 |
| 21.1. 行列方程式としての差分方程式 .....                  | 239 |
| 21.2. いろいろの消去法 .....                        | 244 |
| 21.3. 反復的諸方法 .....                          | 251 |
| 21.4. 同時置換法；勾配法 .....                       | 259 |
| 21.5. Richardson の方法 .....                  | 266 |
| 21.6. 逐次置換法 .....                           | 277 |
| 21.7. Gauss-Southwellの緩和法 .....             | 284 |

## 訳者あとがき

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 偏微分方程式の数値解法の参考書 ..... | 287 |
|-----------------------|-----|

