目　次

まえがき

第1章　集団現象とは ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
§1.1　いろいろな集団の例 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
§1.2　集団現象のパラダイム ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4
(a)　流　　れ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 5
(b)　波　　動 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6
(c)　緩　　和 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 8
(d)　相 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 10
(e)　固有の構造，自己組織化 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 12
(f)　秩序と複雑さ(カオス) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 15

第2章　波動現象の数理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 23
§2.1　波動現象と構造 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 23
(a)　自由伝播する波 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 23
(b)　ポテンシャルに捕捉された波の固有モード ・・・・・・・・・・・ 24
(c)　集団効果による媒体の変調(非線形波動) ・・・・・・・・・・・・ 25
§2.2　古典力学のモチーフ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 26
(a)　粒子集団の運動と波の伝播 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 27
(b)　特性常微分方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 30
(c)　集団現象における非線形効果 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 34
§2.3　非線形性によって与えられる構造：ソリトン ・・・・・・・・・・ 37
(a)　プラズマ中のソリトン ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 37

(b) 非線形固有値問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 40
(c) 非定常問題の定式化 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 42
(d) 逓減摂動法と KdV 方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 44
§2.4 非線形効果，分散，散逸 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 47
(a) 対流型の非線形性 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 47
(b) 分散(幾何光学の視点から) ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 48
(c) 散逸(確率過程の視点から) ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 50
§2.5 量子力学のモチーフ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 54
(a) Lax 方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 54
(b) 非線形 Schrödinger 方程式と光ソリトン ・・・・・・・・・・ 57
§2.6 第 2 章のまとめと補足 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 59
(a) ま と め ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 59
(b) 無限エネルギーの固有モード ・・・・・・・・・・・・・・・・ 61
(c) 運動の積分，断熱不変量 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 61
演習問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 64

第 3 章 流れの幾何学 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 67
§3.1 ポテンシャルによるベクトル場の表現 ・・・・・・・・・・・ 67
(a) スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル ・・・・・・・・ 68
(b) Clebsch ポテンシャル ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 69
(c) Clebsch 表現と Liouville 方程式 ・・・・・・・・・・・・・・ 71
§3.2 微分幾何の基礎的事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 72
(a) 微分形式と外微分 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 73
(b) grad, curl, div ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 75
(c) 閉微分形式，完全微分形式，コホモロジー ・・・・・・・・・・ 77
(d) Poincaré の定理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 78
§3.3 流線方程式の正準形式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 80
(a) 対称性をもつ流れの構造(積分可能な流線) ・・・・・・・・・ 80

(b) 対称性をもたない流れの構造(流線カオス) ・・・・・・ 82
§3.4 流線構造の指標 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 85
(a) Gauss の絡み数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 85
(b) ヘリシティー ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 90
(c) Lyapunov 指数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 93
§3.5 第3章のまとめと補足 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 98
(a) まとめ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 98
(b) 微分形式の積分 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 99
(c) 2次元の微分形式と複素関数論との関係 ・・・・・・・ 100
演習問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 102

第4章 流れの解析学 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 105
§4.1 流れを記述する偏微分方程式 ・・・・・・・・・・・・・ 105
(a) 渦なし非圧縮流(調和ベクトル場) ・・・・・・・・・・ 106
(b) Beltrami 流 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 109
(c) 流体やプラズマの定常状態 ・・・・・・・・・・・・・・ 112
§4.2 関数空間の基礎的事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 114
(a) 変分原理による発見的考察 ・・・・・・・・・・・・・・ 115
(b) Sobolev 空間とトレース定理 ・・・・・・・・・・・・・ 121
(c) 流れの直和分解 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 125
(d) 一般化された Clebsch 表現 ・・・・・・・・・・・・・・ 129
§4.3 渦の量子化 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 132
(a) curl の固有値問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 132
(b) 一様 Beltrami 関数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 135
§4.4 対称性をもつ流れの構造 ・・・・・・・・・・・・・・・ 137
(a) Grad-Shafranov 方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 138
(b) レベルセット座標 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 140
(c) 自由境界をもつ非線形固有関数 ・・・・・・・・・・・・ 146

§4.5 第4章のまとめと補足 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 151
(a) ま と め ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 151
(b) 変分原理の基礎定理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 153
(c) 電磁場の境界条件 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 155
演習問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 156

第5章 スペクトル理論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 159
§5.1 スペクトルと発展方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 160
(a) 簡単な例 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 160
(b) 発展方程式と半群 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 163
(c) レゾルベントとスペクトル ・・・・・・・・・・・・・・・・ 165
(d) Dunford 積分 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 169
§5.2 自己共役作用素のスペクトル分解 ・・・・・・・・・・・・ 171
(a) スペクトル分解と射影作用素 ・・・・・・・・・・・・・・・ 172
(b) 作用素の関数と発展方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 175
(c) 半有界自己共役作用素 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 176
§5.3 線形波動のエルゴード理論 ・・・・・・・・・・・・・・・ 182
(a) 平均エルゴード定理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 182
(b) Landau 減衰 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 187
(c) Landau の極と準線形理論 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 191
§5.4 プラズマのスペクトル理論 ・・・・・・・・・・・・・・・ 197
(a) 理想 MHD 方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 197
(b) 自己共役性とエネルギー原理 ・・・・・・・・・・・・・・・ 200
(c) エネルギー原理の応用(簡単な例) ・・・・・・・・・・・・ 205
(d) 特性方程式の特異点と連続スペクトル ・・・・・・・・・・ 207
(e) 連続スペクトルの特異摂動 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 210
§5.5 第5章のまとめと補足 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 217
(a) ま と め ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 217

(b) 乱れによって与えられる構造(Anderson 局在) ・・・・ 220
演習問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 222

第 6 章 自己組織化の数理モデル ・・・・・・・・・・・・・ 225
§6.1 不安定性と構造の発現 ・・・・・・・・・・・・・・・ 225
(a) 安定性解析の簡単な例 ・・・・・・・・・・・・・・・ 226
(b) 進化における散逸と保存 ・・・・・・・・・・・・・・ 228
(c) Dirichlet の原理(進化に対するアンチ・テーゼ) ・・・・ 228
§6.2 相 転 移 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 233
(a) Ginzburg-Landau 自由エネルギー ・・・・・・・・・・ 233
(b) 定常解の分岐 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 234
(c) 相 転 移 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 236
§6.3 乱流と構造 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 239
(a) Navier-Stokes 方程式と渦方程式 ・・・・・・・・・・ 240
(b) Kelvin の循環法則 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 242
(c) エネルギーとエンストロフィーの評価 ・・・・・・・・ 244
(d) Kolmogorov スペクトル ・・・・・・・・・・・・・・ 251
(e) 逆カスケード(準定常スペクトル) ・・・・・・・・・・ 254
(f) 逆カスケード(2 項過程のモデル) ・・・・・・・・・・ 257
(g) プラズマの自己組織化 ・・・・・・・・・・・・・・・ 259
§6.4 第 6 章のまとめと補足 ・・・・・・・・・・・・・・・ 264
(a) ま と め ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 264
(b) 階層間の断熱相互作用 ・・・・・・・・・・・・・・・ 266
(c) 荷電粒子のドリフトと Hasegawa-Mima 方程式 ・・・・ 268
演習問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 270

付録 3 次元ベクトルの公式 ・・・・・・・・・・・・・・・ 273

付録 基本的な不等式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 275

演習問題解答 279
参 考 書 291
索 引 299