

目 次

序 文

日本語版への序文

訳者序文

1 基礎となる数学

1. 1 空間 R^n とそのトポロジー.....	1
1. 2 写 像.....	5
1. 3 実解析.....	11
1. 4 群 論.....	13
1. 5 線型代数.....	15
1. 6 正方行列の代数.....	19
1. 7 参考文献.....	23

2 微分可能多様体とテンソル

2. 1 多様体の定義.....	26
2. 2 多様体としての球.....	30
2. 3 多様体の他の例.....	32
2. 4 大域的考察.....	34
2. 5 曲 線.....	35
2. 6 M 上の関数.....	36
2. 7 ベクトルとベクトル場.....	37
2. 8 基底ベクトルと基底ベクトル場.....	40
2. 9 ファイバー束(ファイバーバンドル).....	41
2.10 ファイバー束の例.....	43

2.11	ファイバー束についてももう少し	44
2.12	ベクトル場と積分曲線	49
2.13	作用素 $d/d\lambda$ の指数化	50
2.14	Lie 括弧と非座標基底	51
2.15	基底が座標基底である条件	55
2.16	1-形式	58
2.17	1-形式の例	59
2.18	Dirac のデルタ関数	60
2.19	勾配と 1-形式の視覚的表現	62
2.20	基底 1-形式と 1-形式の成分	65
2.21	添字記法	67
2.22	テンソルとテンソル場	67
2.23	テンソルの例	69
2.24	テンソル成分とテンソル積	70
2.25	縮約	71
2.26	基底変換	72
2.27	成分のテンソル演算	76
2.28	関数とスカラー	77
2.29	ベクトル空間上の計量テンソル	77
2.30	多様体上のテンソル場	82
2.31	特殊相対論	85
2.32	参考文献	86

3 Lie 微分と Lie 群

3.1	序：ベクトル場が多様体の中で定義する写像	88
3.2	関数の Lie (リー) 移動	89
3.3	ベクトル場の Lie 移動	89
3.4	Lie (リー) 微分	91
3.5	1-形式の Lie 微分	95

3.6	部分多様体	96
3.7	Frobenius (フロベニウス) の定理 (ベクトル場による表現)	98
3.8	Frobenius (フロベニウス) の定理の証明	100
3.9	例： S^2 の生成元	103
3.10	不変性	105
3.11	Killing (キリング) ベクトル場	106
3.12	Killing ベクトルと質点力学における保存量	107
3.13	軸対称性	108
3.14	抽象 Lie 群	111
3.15	Lie 群の例	115
3.16	Lie 代数とその群	123
3.17	実現と表現	128
3.18	球対称性，球面調和関数と回転群の表現	131
3.19	参考文献	136

4 微分形式

A 形式の代数と積分法

4.1	体積の定義——微分形式の幾何学的役割	138
4.2	反対称テンソルの記号と定義	140
4.3	微分形式	142
4.4	微分形式の扱い方	144
4.5	形式の制限	146
4.6	形式の場	146
4.7	左右手系性と向き付け可能性	147
4.8	向き付けられた多様体上の体積と積分	148
4.9	N-ベクトル，双対，記号 $\epsilon_{ij\dots k}$	152
4.10	テンソル密度	156
4.11	一般化された Kronecker (クロネッカー) のデルタ	158

4.12	行列式と $\epsilon_{ij\dots k}$	160
4.13	計量体積要素	161
B 形式の微分計算とその応用		
4.14	外微分	164
4.15	微分の記法	165
4.16	外微分の例	166
4.17	偏微分方程式に対する積分可能条件	168
4.18	完全形式	169
4.19	閉じた形式の局所完全性の証明	170
4.20	形式の Lie 微分	173
4.21	Lie 微分と外微分の可換性	175
4.22	Stokes (ストークス) の定理	175
4.23	Gauss (ガウス) の定理と発散の定義	179
4.24	コホモロジー理論入門	182
4.25	微分形式と微分方程式	185
4.26	Frobenius の定理 (微分形式を用いた表現)	188
4.27	Frobenius の定理の二つの表現の同等性の証明	192
4.28	保存則	193
4.29	ベクトル球面調和関数	195
4.30	参考文献	197
5 物理学への応用		
A 熱力学		
5.1	簡単な系	198
5.2	Maxwell (マックスウェル) の恒等式と他の数学的恒等式	199
5.3	多成分熱力学系: Caratheodory (カラセオドリ) の定理	201
B ハミルトン力学		
5.4	ハミルトニアンベクトル場	203
5.5	正準変換	205

5.6	ω によって与えられるベクトルと 1-形式との間の写像	205
5.7	Poisson (ポアソン) 括弧	206
5.8	多体系: シンプレクティック形式	207
5.9	線型力学系: シンプレクティック内積と保存量	208
5.10	ハミルトン方程式のファイバー束構造	211
C 電磁気学		
5.11	微分形式を用いて Maxwell 方程式を書き直す	213
5.12	電荷とトポロジー	217
5.13	ベクトルポテンシャル	218
5.14	平面波: 単純な例	219
D 完全流体の力学		
5.15	Lie 微分の役割	220
5.16	共動 (comoving) 時間微分	221
5.17	運動方程式	222
5.18	渦度の保存	224
E 宇宙論		
5.19	宇宙原理	226
5.20	最大対称の Lie 代数	230
5.21	球対称 3 次元空間の計量	233
5.22	六つの Killing ベクトルの構成法	236
5.23	開いた, 閉じた, 平坦な宇宙	239
5.24	参考文献	241
6 Riemann 多様体の接続とゲージ理論		
6.1	序	243
6.2	曲面上の平行移動	244
6.3	共変微分	245
6.4	成分: 基底の共変微分	247

6. 5	ねじれ (Torsion)	250
6. 6	測地線	251
6. 7	正規座標	253
6. 8	Riemann (リーマン) テンソル	254
6. 9	Riemann テンソルの幾何学的解釈	256
6.10	平坦な空間	258
6.11	接続と体積測度あるいは計量との両立性	259
6.12	計量接続	261
6.13	アフィン接続と等価原理	263
6.14	接続とゲージ理論：電磁気学の例	264
6.15	参考文献	268
付録：練習問題のヒントと解答		269
記 法		291
索 引		293