

Table des matieres

Avant-propos	7
Bibliographie sommaire.....	13
Notations	15
Plan général.....	17

Première partie	Intégrales et applications	19
-----------------	-----------------------------------	----

Chapitre I	Topologie. Orientation	21
------------	-------------------------------	----

I. Région. Homéomorphie	22
--------------------------------	----

1. Région de l'espace, du plan, d'une courbe.....	22
2. Frontière	22
3. Région bornée.....	23
4. Domaine. Région fermée.....	23
5. Partie de l'espace, d'une surface, d'une courbe.....	24
6. Homéomorphie entre régions bornées.....	24
7. Propriété des points intérieurs.....	25
8. Courbes homéomorphes.....	25
9. Ordre de connexion dans le plan.....	26
10. Domaines plans homéomorphes.....	26
11. Disque à trous.....	26
12. Propriété des disques.....	26
13. Régions de l'espace homéomorphes.....	27
Exercices de récapitulation.....	27

II. Orientation. Transversalité	28
--	----

14. Orientation d'un arc	28
15. Orientation d'une courbe	28
16. Orientation d'un disque.....	29
17. Surface orientable.....	29
18. Orientation d'une surface orientable	30
19. Propriétés des surfaces orientables	30
20. Orientation d'un angle dans le plan	32
21. Homéomorphie entre régions orientées dans des plans orientés.	32
22. Orientation d'une boule.....	34
23. Orientation de l'espace'.....	34
24. Trièdre orienté	35
25. Trièdre humain	35
26. Homéomorphies entre régions orientées dans des espaces orientés.....	35

27. Transversalité d'une courbe plane	36
28. Liaison entre l'orientation et la transversalité.....	37
29. Demi-normale extérieure à une région du plan	37
30. Transversalité d'une surface	38
31. Liaison entre l'orientation et la transversalité pour une surface	38
32. Demi-normale extérieure à une région de l'espace.....	39
Exercices de récapitulation	39

Chapitre II

Intégrales 41

I. Types usuels de discontinuités 42

1. Discontinuité de première espèce d'une fonction d'une variable.	42
2. Ligne de discontinuité de première espèce pour une fonction de deux variables.....	44
3. Point de discontinuité isolé pour une fonction de deux variables.....	45
Exercices de récapitulation.....	46

II. Intégrale suivant une mesure 47

4. Mesure	47
5. Mesure par répartition de masses	47
6. Intégrale suivant une mesure	48
7. Catégories de fonctions intégrables suivant une mesure	49
8. Existence des intégrales simples, doubles, triples, rencontrées dans des problèmes techniques.....	50
9. Exemples de quantités s'exprimant par des intégrales	50
10. Somme fondamentale généralisée.....	54
11. Exemple. Longueur d'un arc de courbe.....	54
12. Propriétés des intégrales. Linéarité, additivité	55
13. Formule de la moyenne.....	56
14. Inégalité de Schwarz.....	57
15. Valeur moyenne. Valeur efficace	57
16. Intégrales infiniment petites.....	59
17. Énoncé d'une réciproque	59
18. Changement de mesure.....	59
19. Expression des intégrales relatives à des masses réparties avec une densité continue	60
Exercices de récapitulation	61

III. Mesure de Dirac 61

20. Mesure de Dirac.....	61
21. Intégrales par rapport à la mesure de Dirac.....	62
22. Echelon unité	62
23. Examen plus détaillé des phénomènes physiques conduisant à l'échelon unité.....	64

24. Fonction percussion	64
25. Théorème de l'intégrale	65
26. La locution « fonction de Dirac ».....	66
27. Théorie des distributions	66
Exercices de récapitulation	66

IV. Compléments sur les intégrales ordinaires 67

28. Intégrale simple orientée et non orientée	67
29. Expression des intégrales doubles par des intégrales simples...	67
30. Expression des intégrales triples par des intégrales simples et doubles.....	71
31. Rapport d'aires infiniment petites dans une homéomorphie entre régions planes.....	72
32. Rapport des volumes infiniment petits dans une homéo- morphie dans l'espace.....	74
33. Intégrale double orientée et non orientée	74
34. Changement de variables dans une intégrale double non orientée	75
35. Changement de variables dans une intégrale double orientée...	76
36. Changement de variables dans les intégrales triples	76
Exercices de récapitulation	77

V. Intégrales dépendant de paramètres 77

37. Position du problème	77
38. Passage à la limite sous le signe somme dans le cas d'une intégrale à limites fixes.....	78
39. Exemple de non intégrabilité d'une limite	79
40. Continuité d'une intégrale à limites fixes	80
41. Continuité d'une intégrale à limites variables	81
42. Intégration sous le signe somme	81
43. Dérivation sous le signe somme d'une intégrale à limites fixes.	82
44. Dérivation sous le signe somme (limites variables)	83
45. Cas des intégrales multiples	84
Exercices de récapitulation	84

Chapitre III

Extension d'intégrales. Séries. Applications 87

I. Intégrale et série simple 88

1. Extension d'intégrale simple. Intervalle infini.....	88
2. Extension d'intégrale simple. Fonction non bornée au voisinage d'un point	89
3. Série simple et intégrale simple.....	90
4. Série simple convergente, divergente	91
Exercices de récapitulation	92

II. Intégrales et séries simples. Cas positif	92
5. Rappel d'un théorème sur les limites	92
6. Intervalle infini. Fonction positive.....	93
7. Théorème de comparaison.....	93
8. Fonction positive non bornée au voisinage d'un point.....	95
9. Série simple à termes positifs	96
10. Séries usuelles de comparaison	96
Exercices de récapitulation	97
III. Absolue convergence	98
11. Lemme de Cauchy	98
12. Intégrale dans un intervalle infini. Fonction de signe quelconque	98
13. Fonction non bornée au voisinage de b	100
14. Remarque sur les expressions qui sont des extensions d'intégrale de plusieurs manières.....	100
15. Valeur principale	101
16. Séries à termes de signes quelconques.....	101
Exercices de récapitulation	101
IV. Intégrales et séries multiples	102
17. Extension d'intégrale double. Région non bornée.....	102
18. Extension d'intégrale double. Fonction non bornée	104
19. Série double	104
20. Théorèmes relatifs au cas où n'interviennent que des quantités positives. Cas de la région infinie.....	105
21. Théorèmes de comparaison	107
22. Intégrales usuelles de comparaison.....	108
23. Région bornée. Fonction positive non bornée	108
24. Série double à termes positifs	109
25. Extension d'intégrale double portant sur une fonction non positive. Série double à termes de signe quelconque.....	110
26. Etude pratique de la convergence	112
* 27. Exemple d'étude de convergence d'intégrale : charges électriques sur une surface	112
Exercices de récapitulation	114
V. Propriétés des extensions d'intégrales	116
* 28. Continuité d'une extension d'intégrale dépendant de paramètres.....	116
* 29. Limite d'une extension d'intégrale dépendant de paramètres.....	119
* 30. Continuité de la somme d'une série dont les termes dépendent de paramètres	122
* 31. Intégrabilité sous le signe somme d'une extension d'intégrale dépendant de paramètres.....	123
* 32. Autre condition pour l'intégrabilité sous le signe somme	126
* 33. Intégration terme à terme d'une série	128

* 34. Autre condition pour l'intégration terme à terme d'une série.	129
* 35. Double sommation	130
* 36. Autre condition permettant la double sommation	132
37. Questions de dérivation	133
Exercices de récapitulation	134

VI. Fonction $Er(x)$. Intégrales de Fresnel. Fonctions $Si(x)$ $Ci(x)$ 134

38. Définition de $Er(x)$	134
39. Variation de $Er(x)$	134
40. Branche infinie de $Er(x)$	135
41. Valeur de quelques intégrales remarquables	137
42. Tables numériques existantes	137
43. Formule asymptotique pour $Er(x)$	138
44. Mode d'emploi d'un développement asymptotique	138
45. Définition des intégrales de Fresnel	139
46. Tables d'intégrales de Fresnel	139
47. Sinus intégral	140
48. Cosinus intégral	142
49. Tables de cosinus et sinus intégral	142
50. Développements de $Si(x)$, $Ci(x)$ au voisinage de zéro	142
51. Développements asymptotiques de $Si(x)$, $Ci(x)$	143
Exercices de récapitulation	144

VII. Fonction factorielle 145

52. Fonction factorielle	145
53. Relation fonctionnelle de la fonction $x!$	146
54. Valeurs remarquables de $x!$	146
55. Définition de $x!$ pour x négatif non entier	146
56. Courbe représentative et variation de $x!$	147
57. Etude de $\theta(x) = 1/x!$	149
58. Tables existantes	150
59. Fonction beta	151
60. Formule du complément	152
61. Formule de Wallis	152
62. Formule de Stirling	153
Exercices de récapitulation	154

Chapitre IV

Probabilités 157

I. Définition 158

1. Exemple préliminaire	158
2. Probabilités discrètes	158
3. Etude d'exemples continus	158
4. Définition générale de la probabilité	159
5. Quasi certitude, quasi impossibilité	160
Exercices de récapitulation	160

II. Lois de composition des ensembles. Applications aux probabilités	160
6. Complémentaire	160
7. Propriétés du complémentaire.....	161
8. Réunion et intersection	161
9. Probabilités totales	163
10. Probabilités liées.....	164
11. Probabilités composées	165
12. Ensemble structuré	165
13. Application au jeu de dés	166
14. Distribution de cartes	167
15. Probabilité projection ou loi marginale dans le cas discret....	167
16. Produit d'ensembles	168
17. Exemples de probabilités projections dans le cas d'un produit.	168
18. Indépendance stochastique	170
19. Probabilité produit dans le cas discret	170
Exercices de récapitulation	170
 III. Variable aléatoire à une ou plusieurs dimensions	 171
20. Variable aléatoire à une dimension.....	171
21. Densité de probabilité	171
22. Changement de variable	171
23. Fonction de répartition	172
24. Médiane.....	173
25. Mode	173
26. Espérance mathématique	174
27. Moyenne.....	174
28. Moment d'ordre r	175
29. Moments rapportés à la moyenne	175
30. Ecart quadratique moyen	176
31. Exemple d'utilisation des moments. Inégalité de Bienaymé ...	176
32. Fonction caractéristique.....	177
33. Relation entre la fonction caractéristique et les moments....	178
34. Effet d'une transformation linéaire sur la fonction caractéristique.....	179
35. Variable aléatoire à deux dimensions.....	179
36. Probabilités projections ou lois marginales. Probabilités liées..	179
37. Produit de variables aléatoires à une dimension	180
38. Changement de variables	180
39. Passage à une variable	181
40. Moyenne en x d'une variable aléatoire à deux dimensions	182
41. Moments mixtes du produit de deux variables aléatoires à une dimension.....	182
42. Fonction caractéristique d'une somme de deux variables indépendantes	183
Exercices de récapitulation	183

IV. Lois usuelles de probabilité	184
43. Loi binomiale	184
44. Moyenne et écart quadratique moyen.....	184
45. Application de l'inégalité de Bienaymé.....	185
46. Fonction caractéristique de la loi binomiale	185
47. Loi de Gauss ou loi normale	186
48. Moyenne et écart quadratique	186
49. Fonction caractéristique de la loi de Gauss	187
50. Somme de variables stochastiquement indépendantes obéissant à la loi de Gauss.....	187
51. Loi normale comme limite de la loi binomiale.....	188
52. Théorème central limite pour des composantes identiques.....	191
53. Loi de Poisson.....	191
54. Moyenne et écart quadratique moyen.....	192
55. Loi de Poisson comme limite d'une loi binomiale	192
Exercices de récapitulation	193

Chapitre V

Série trigonométriques	195
-------------------------------	------------

I. Coefficients de Fourier	196
1. Prolongement d'une fonction par périodicité	196
2. Orthogonalité de fonctions.....	196
3. Relations d'orthogonalité des lignes trigonométriques	197
4. Coefficients de Fourier d'une fonction.....	198
5. Condition de validité des calculs ci-dessus	200
6. Inégalité de Bessel.....	201
7. Expression plus générale des coefficients de Fourier	202
8. Coefficients de Fourier complexes	202
9. Spectre discontinu	203
10. Linéarité	204
11. Translation	205
12. Homothétie	205
13. Application aux symétries	206
14. Coefficients de Fourier de la mesure de Dirac périodique	206
15. Coefficients de Fourier d'une dérivée	207
16. Coefficients de Fourier de la dérivée d'une fonction ayant des discontinuités	207
17. Produit de composition. Convolution	208
18. Coefficients de Fourier d'un produit de composition	209
Exercices de récapitulation	209

	II. Séries de Fourier	210
	19. Série de Fourier. Série trigonométrique	210
	20. Premier théorème	210
	21. Deuxième théorème	211
	22. Série trigonométrique sous forme exponentielle complexe.....	214
	23. Formule de Parseval	215
	24. Cas où les deux fonctions sont identiques	216
	Exercices de récapitulation	216
Deuxième partie	Matrices. Vecteurs. Nombres complexes	219
Chapitre VI	Matrices	221
	I. Quantités indicées	222
	1. Cas d'un seul indice	222
	2. Relation avec la notion de fonction	223
	3. Valeurs prises par l'indice	223
	4. Cas de deux indices	223
	5. Passage à un seul indice	224
	6. Valeurs prises par les indices	224
	7. Représentation graphique	225
	8. Cas de plus de deux indices	226
	9. Règles d'emploi des quantités indicées	226
	Exercices de récapitulation	227
	II. Matrices. Somme et produit	227
	10. Relation avec les quantités indicées	227
	11. Notations	229
	12. Matrice ligne. Matrice colonne	230
	13. Matrice carrée	230
	14. Somme de matrices	230
	15. Produit d'une matrice par un nombre	231
	16. Somme de vecteurs. Produit d'un vecteur par un scalaire....	231
	17. Produit de deux matrices.....	232
	18. Transformation linéaire homogène et matrice	233
	19. Produit de transformations linéaires homogènes	233
	20. Propriétés du produit	234
	21. Généralisation de la notion de matrice.....	236
	22. Multiplicateur	236
	23. Transposée d'une matrice	237
	24. Matrices carrées d'ordre n	237
	25. Matrice diagonale. Matrice symétrique	238
	Exercices de récapitulation	238

III. Exemples d'emploi des sommes et produits matriciels	239
26. Transformation linéaire homogène écrite au moyen de produits matriciels	239
27. Changement de coordonnées cartésiennes respectant l'origine.	240
28. Changement de coordonnées cartésiennes rectangulaires respectant l'origine	240
29. Matrice jacobienne	241
30. Système d'équations du premier degré	242
31. Forme quadratique écrite au moyen de produits matriciels....	242
32. Changement de système de référence dans une forme quadratique	242
33. Produit scalaire de deux vecteurs. Inégalité de Schwarz pour les vecteurs	243
Exercices de récapitulation.....	244
IV. Déterminant. Inverse	244
34. Inversions dans une suite.....	244
35. Définition du déterminant	245
36. Règle de Sarrus pour un déterminant d'ordre 3.....	246
37. Propriétés des déterminants	247
38. Linéarité	248
39. Combinaisons de colonnes	248
40. Déterminant du produit de deux matrices	248
41. Mineurs	249
42. Développement du déterminant suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne.....	250
43. Calcul de la valeur d'un déterminant par réduction	251
44. Dérivée d'un déterminant	252
45. Propriétés des mineurs d'un déterminant.....	253
46. Matrice adjointe d'une matrice donnée.....	254
47. Matrice singulière	254
48. Inverse d'une matrice non singulière	254
49. Propriétés de la matrice inverse.....	255
Exercices de récapitulation	256
V. Applications de la notion d'inverse	258
50. Dépendance et indépendance linéaire de colonnes	258
51. Expression matricielle de la dépendance linéaire	259
52. Base des colonnes d'une matrice	259
53. Invariance du rang.....	262
54. Système d'équations du premier degré	263
55. Conjuguée d'une matrice par rapport à une autre matrice	265
56. Changement de système de référence dans une transformation linéaire	266
57. Matrice de permutations	266
Exercices de récapitulation	267

VI. Valeurs propres et colonnes propres	270
58. Valeurs propres. Colonnes propres d'une matrice	270
59. Interprétation des colonnes propres dans le cas d'une transformation linéaire.....	271
60. Valeurs et colonnes propres de matrices conjuguées.....	272
61. Propriétés des matrices ayant n colonnes propres linéairement indépendantes	272
62. Matrices dont les valeurs propres sont distinctes	273
63. Cas des matrices ayant des valeurs propres multiples.....	274
64. Orthogonalité des colonnes et lignes propres	277
65. Application aux matrices symétriques	278
66. Valeurs propres des matrices symétriques à termes réels	278
67. Nombre des colonnes propres d'une matrice symétrique à éléments réels	278
Exercices de récapitulation	280

Chapitre VII

Vecteurs. Intégrales vectorielles 283

I. Compléments d'algèbre et d'analyse vectorielles 284

1. Double produit vectoriel	284
2. Critique de la notion de produit vectoriel	285
3. Produit extérieur	285
4. Retour au produit vectoriel	286
5. Extension à l'espace à quatre dimensions	286
6. Remarques sur le cas du plan	287
7. Vecteur polaire et vecteur axial. Scalaire et pseudo-scalaire...	287
8. Vecteur fonction d'un paramètre	288
9. Vecteur dérivé d'un vecteur	289
10. Exemple de dérivation de vecteur	289
11. Propriétés de la dérivée	290
12. Point fonction d'un paramètre	291
13. Exemples et applications de la notion de dérivée d'un vecteur.	292
Exercices de récapitulation	293

II. Circulation 294

14. Circulation	294
15. Expression par une intégrale ordinaire	295
16. Propriétés de la circulation	296
17. Indice de l'origine par rapport à une courbe orientée fermée plane	297
18. Aire limitée par une courbe orientée fermée plane	298
19. Autres intégrales vectorielles	301
Exercices de récapitulation	302

III. Flux	304
20. Définition.....	304
21. Propriétés du flux	304
22. Expression pour une surface donnée paramétriquement	305
23. Angle solide d'une surface par rapport à un point	306
24. Angle solide pour la frontière d'une région bornée régulière de l'espace	309
25. Discontinuité de l'angle solide à la traversée d'une surface....	310
26. Angle solide d'un contour orienté	311
27. Remarque sur les angles plans	311
28. Autres intégrales vectorielles	312
29. Intégrales infiniment petites.....	312
Exercices de récapitulation	313

Chapitre XIII

Théorie des champs	315
---------------------------	------------

I. Gradient. Divergence. Rotationnel. Laplacien	316
1. Champ scalaire.....	316
2. Champ vectoriel.....	317
3. Ligne de force	317
4. Champ plan	318
5. Point singulier d'un champ.....	318
6. Gradient	318
7. Dérivation et différentiation dans un champ scalaire.....	320
8. Gradient et surfaces de niveau	321
9. Représentation d'un champ par surfaces de niveau et construction du gradient.....	322
10. Gradient d'une fonction de fonction	323
11. Formule de Green-Riemann	324
12. Importance des points singuliers	326
13. Formule de Stokes. Rotationnel	326
14. Unicité et invariance du rotationnel	329
15. Formule d'Ostrogradsky.....	329
16. Importance des points singuliers	331
17. Unicité et invariance de la divergence	332
18. Mécanisme d'obtention de la divergence et du rotationnel	332
19. Propriétés de la divergence et du rotationnel	334
20. Permutabilité avec une dérivation	335
21. Identités entre le gradient, la divergence et le rotationnel.....	335
22. Laplacien d'un champ scalaire, d'une fonction. Fonction harmonique	336
23. Laplacien d'un champ vectoriel	336
24. Dérivée d'un vecteur suivant un autre vecteur	338
25. Formules de transformation d'intégrales vectorielles	339
Exercices de récapitulation	340

II. Coordonnées curvilignes orthogonales	344
26. Définition.....	344
27. Circulation, flux et intégrale triple en coordonnées curvilignes orthogonales.....	347
28. Gradient, rotationnel, divergence en coordonnées curvilignes orthogonales.....	349
29. Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales.....	350
30. Cas des coordonnées cylindriques.....	351
31. Cas des coordonnées sphériques.....	353
Exercices de récapitulation.....	355
 III. Potentiel. Potentiel vecteur. Singularités	 355
32. Champ de gradient.....	355
33. Champ conservatif.....	356
34. Equivalence des deux notions précédentes.....	356
35. Potentiel.....	357
36. Champ à rotationnel nul.....	357
37. Théorème local.....	359
38. Intérêt de la notion de potentiel.....	360
* 39. Gradient singulier.....	360
40. Exemple montrant le rôle des lignes singulières.....	361
41. Circulation singulière ou période dans un champ à rotationnel nul.....	362
42. Forme du potentiel lorsqu'il y a des circulations singulières....	364
* 43. Rotationnel singulier.....	364
44. Flux singulier.....	368
45. Divergence singulière.....	369
46. Divergence singulière du champ des vitesses du mouvement permanent d'un fluide incompressible.....	370
47. Généralisation de la formule d'Ostrogradsky.....	371
* 48. Interprétation de la divergence singulière dans le cas d'une surface de singularités.....	372
49. Champ à flux conservatif.....	373
50. Champ de rotationnel.....	374
51. Champ à divergence nulle.....	374
52. Théorème local.....	375
* 53. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit dans toute son étendue un champ de rotationnel.....	375
54. Indétermination des solutions de $\text{rot } \vec{G} = \vec{A}$	379
55. Potentiel vecteur.....	379
56. Indétermination du potentiel vecteur.....	380
57. Intérêt de la notion de potentiel vecteur.....	380
Exercices de récapitulation.....	381

Chapitre IX	Fonctions élémentaires d'une variable complexe	383
	I. Généralités	384
	1. Fonction complexe d'une variable réelle. Représentation	384
	2. Fonction d'une variable complexe	385
	3. Représentation d'une fonction d'une variable complexe	385
	4. Fonction homographique	390
	Exercices de récapitulation	393
	II. Exponentielle et lignes trigonométriques	394
	5. Exponentielle	394
	6. Relation fonctionnelle de l'exponentielle	395
	7. Représentation de l'exponentielle	395
	8. Valeurs prises par l'exponentielle	395
	9. Lignes trigonométriques et hyperboliques.....	397
	10. Relations fonctionnelles.....	398
	11. Passage des lignes trigonométriques aux lignes hyperboliques .	398
	12. Partie réelle et imaginaire, module des lignes trigonométriques.	399
	13. Représentation de $\cos z$. Valeurs prises	400
	14. Représentation de $\operatorname{tg} z$. Valeurs prises	403
	Exercices de récapitulation	406
	III. Logarithme. Puissance	406
	15. Logarithme	406
	16. Coupure. Branche principale du logarithme	408
	17. Représentation de la branche principale du logarithme.....	409
	18. Valeurs prises par la branche principale	409
	19. Point de ramification	410
	20. Surface de Riemann	410
	21. Puissance	410
	22. Branche principale de z^n	412
	23. Etude de $\sqrt{z}$	412
	24. Surface de Riemann de $\sqrt{z}$	412
	25. Exemples de radicaux	413
	Exercices de récapitulation	414
Chapitre X	Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable complexe	417
	I. Dérivée d'une fonction de variable complexe	418
	1. Dérivée d'une fonction d'une variable complexe.....	418
	2. Opérations sur la dérivée	419
	3. Dérivées des fonctions usuelles.....	420
	4. Fonction analytique, holomorphe. Point singulier	421
	Exercices de récapitulation	421

II. Intégrales

5. Intégrales des fonctions de variables complexes	422
6. Relation avec les conditions d'analyticité	424
7. Majoration d'intégrales dans le plan complexe.....	424
* 7 bis. Autres exemples d'intégrale sur un contour s'éloignant à l'infini	427
8. Formule de Cauchy	429
Exercices de récapitulation	430

III. Séries entières et fonctions analytiques 432

9. Propriété préliminaire des séries entières	432
10. Rayon de convergence d'une série entière.....	432
11. Comportement sur le cercle de convergence.....	434
12. Continuité et dérivabilité des séries entières	434
13. Propriétés générales des fonctions analytiques	435
Exercices de récapitulation	437

IV. Prolongement analytique 438

14. Prolongement analytique	438
15. Prolongement des relations fonctionnelles.....	440
16. Principe de symétrie. Première forme	442
17. Principe de symétrie. Généralisation	443
18. Principe de symétrie (deuxième forme)	445
Exercices de récapitulation	446

V. Résidus 447

19. Théorie des résidus dans le cas d'un pôle	447
20. Exemple de calcul d'intégrale par la méthode des résidus.....	450
Exercices de récapitulation	452

VI. Primitive 453

21. Primitive d'une fonction analytique	453
22. Primitive d'une fonction analytique lorsqu'il y a des pôles ...	454
23. Exemple de primitive dans le cas où il y a une coupure	454

Chapitre XI**Représentation conforme. Champ plan** 457**I. Propriétés géométriques** 458

1. Interprétation géométrique de l'existence d'une dérivée	458
2. Interprétation du module de la dérivée	460
3. Propriétés des petits carreaux	461
4. Cas où la dérivée est nulle en un point	462
Exercices de récapitulation	462

II. Représentation conforme	463
5. Représentation conforme	463
6. Conservation des sens de parcours.....	464
7. Premières propriétés des représentations conformes	464
8. Condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une représentation conforme de l'intérieur d'une région bornée sur l'intérieur d'un cercle.....	465
9. Correspondance entre points frontières.....	466
10. Point à l'infini du plan complexe.....	467
11. Représentation conforme de l'intérieur d'une région non bornée sur l'intérieur d'un cercle.....	467
12. Représentations conformes de l'intérieur d'un cercle sur lui-même	470
13. Degré d'indétermination des représentations conformes d'une région sur une autre.....	472
* 14. Représentations conformes pour les régions dont l'intérieur n'est pas un disque.....	473
15. Exemples de détermination de représentations conformes	475
16. Transformation de Joukowski	481
Exercices de récapitulation	483
III. Fonction harmonique	484
17. Fonction harmonique.....	484
18. Fonctions harmoniques associées	484
Exercices de récapitulation	485
IV. Champ plan	486
19. Flux dans un champ plan	486
20. Champ associé à une fonction analytique.....	487
21. Fonction analytique associée à un champ conservatif et à flux conservatif. Potentiel complexe.....	489
22. Cas où le champ est seulement à rotationnel et divergence nuls.	490
23. Représentation graphique du champ attaché à une fonction.	490
24. Exemple. Champ des vitesses du mouvement plan permanent irrotationnel d'un fluide incompressible	491
25. Principe de symétrie	491
26. Opérations simples sur les potentiels complexes	491
27. Addition de deux fonctions.....	492
28. Fonction inverse	493
29. Autre exemple d'opération	493
30. Changement de variable	494
31. Effet d'une transformation conforme sur une dérivée normale.	495
32. Problèmes de détermination de champs plans possédant un potentiel complexe.....	496
33. Exemples de détermination de champs plans	497
34. Cas d'une charge concentrée, d'une source.....	502
35. Exemple de champ avec source	503
36. Champ avec ligne de jet	504
Exercices de récapitulation	507

Troisième partie	Problèmes différentiels et aux dérivées partielles	509
Chapitre XII	Mise en équation de problèmes	511
	I. Problèmes différentiels de conditions initiales	513
	1. Balance de torsion	513
	2. Circuits électriques couplés	515
	3. Marche des électrons dans une lentille électrostatique	516
	Exercices de récapitulation	518
	II. Problèmes différentiels de conditions aux limites	519
	4. Représentation des températures dans un mur	519
	5. Equilibre d'une corde	521
	6. Equilibre d'une tige	522
	Exercices de récapitulation	524
	III. Problèmes d'équations aux dérivées partielles	525
	7. Vibrations d'une corde	525
	8. Propagation de la chaleur	527
	9. Régime stationnaire des températures	529
	Exercices de récapitulation	529
	IV. Autres équations	529
	10. Conditions pour obtenir une équation différentielle ou aux dérivées partielles	529
	11. Régulation avec retard	529
	12. Phénomène d'usure	530
	Exercices de récapitulation	531
Chapitre XIII	Systèmes différentiels	533
	I. Généralités sur les équations et systèmes différentiels	534
	1. Equations différentielles	534
	2. Forme résolue	534
	3. Système différentiel.....	535
	4. Forme résolue	535
	5. Transformation d'un système différentiel. Forme canonique ..	536
	6. Forme résolue équilibrée	536
	7. Passage à la forme résolue équilibrée	536

8. Diminution du nombre des fonctions inconnues par dérivation et élimination	537
9. Importance physique des problèmes différentiels.....	538
10. Théorèmes d'existence et d'unicité pour une équation différentielle du premier ordre.....	538
11. Interprétation géométrique des solutions d'une équation du premier ordre. Point singulier.....	539
12. Théorème d'existence et d'unicité pour un système différentiel.	539
Exercices de récapitulation	541
II. Ecriture des systèmes linéaires	541
13. Linéarisation	541
14. Cas particulier.....	543
15. Système différentiel linéaire. Système homogène	543
16. Forme résolue d'un système linéaire	543
17. Valeurs singulières d'un système linéaire	544
18. Matrice fonction. Dérivée d'une matrice	544
19. Ecriture matricielle d'un système différentiel	545
20. Multiplication à gauche par une matrice	546
21. Ecriture matricielle résolue	546
22. Opérateur différentiel linéaire et homogène	547
23. Intérêt physique de la notion d'opérateur	548
24. Somme et produit d'opérateurs.....	548
25. Ecriture d'un système linéaire par des opérateurs	550
26. Matrice d'opérateurs	550
27. Ecriture d'un système différentiel linéaire au moyen d'une matrice d'opérateurs.....	551
Exercices de récapitulation	551
III. Résolution des systèmes linéaires	552
28. Théorème de superposition	552
29. Changement de variable dans un système linéaire.....	553
30. Changement linéaire de fonctions dans un système linéaire ...	553
31. Matrice solution d'un système homogène	554
32. Théorème fondamental sur les matrices solutions	555
33. Forme des solutions d'un système linéaire et homogène.....	556
34. Forme générale des solutions d'un système non homogène	557
35. Fractionnement d'un système lorsque l'on connaît une ou plusieurs solutions du système homogène correspondant. Variation des constantes.....	557
36. Matrice fondamentale	562
37. Application à la résolution de l'équation non homogène.....	563
38. Réponse percussionnelle dans le cas d'un système sous forme canonique.....	564
39. Etude plus détaillée d'un exemple physique.....	565
40. Réponse percussionnelle dans le cas d'un système linéaire quelconque.....	566
Exercices de récapitulation	566

IV. Systèmes linéaires à coefficients constants	567
41. Origine physique.....	567
42. Exponentielle, forme critique	567
43. Classification des exponentielles et des formes critiques	568
44. Représentation de Fresnel pour les exponentielles éoliennes...	568
45. Etude plus poussée des exponentielles stables et de leurs parties réelles	569
46. Opérateur différentiel linéaire homogène à coefficients constants	573
47. Effet d'un opérateur à coefficients constants sur une exponentielle, sur une forme critique.....	573
48. Impédance attachée à un opérateur à coefficients constants...	574
49. Exemple d'une exponentielle éolienne.....	574
50. Effet d'un opérateur à coefficients réels constants sur une exponentielle et sur sa partie réelle. Méthode des imaginaires..	575
51. Système linéaire à coefficients constants.....	576
52. Transformations conservant les systèmes linéaires à coefficients constants.....	576
53. Matrice caractéristique	577
54. Equation caractéristique	578
55. Propriétés d'invariance de l'équation caractéristique	578
56. Equation caractéristique d'un système sous forme canonique.	580
57. Etude du cas où il existe n colonnes propres linéairement indépendantes	580
58. Etude d'un exemple où il existe moins de n colonnes propres.	582
59. Système contenant des termes non homogènes exponentiels. Admittances. Réponse isomorphe.....	583
60. Remarque sur la réponse isomorphe dans le cas d'un système stable avec terme non homogène éolien.....	585
61. Cas où le terme non homogène est la partie réelle d'une exponentielle	585
Exercices de récapitulation	586

Chapitre XIV

Fonctions de Bessel **587**

I. Fonctions de première espèce	588
1. Equation de Bessel	588
2. Fonction de Bessel de première espèce	588
3. Définition de $J_{-n}(z)$ (n entier positif)	591
4. Intégrale générale de l'équation de Bessel pour ν non entier ..	591
5. Etude des fonctions de Bessel de première espèce en variables réelles	593
6. Etude des fonctions de Bessel de première espèce en variables complexes	595
7. Etude de $J_{\nu}(z)$ comme fonction de ν	595
8. Relations de récurrence	596
9. Autre forme des relations de récurrence	597
10. Fonctions de Bessel d'ordre $\pm \frac{1}{2}$	597
Exercices de récapitulation	598

II. Fonctions de deuxième espèce	599
11. Fonction de Bessel (ou fonction cylindrique) de deuxième espèce	599
12. Relations de récurrence.....	601
13. Propriétés des fonctions de Bessel de deuxième espèce en variables complexes	601
14. Propriétés des fonctions de Bessel de deuxième espèce pour x réel	602
15. Intégrale générale de l'équation de Bessel d'indice entier n	602
16. Fonctions de Bessel de troisième espèce.....	604
Exercices de récapitulation	604
III. Compléments sur les fonctions de Bessel	604
17. Equations se ramenant à celle de Bessel.....	604
18. Expressions intégrales solutions de l'équation de Bessel d'ordre zéro.....	606
19. Expression précise de l'intégrale ci-dessus.....	606
20. Parties principales à l'infini de $J_0(x)$ et $Y_0(x)$	608
21. Formules asymptotiques dans le cas général.....	610
Exercices de récapitulation	611
IV. Fonctions modifiées	611
22. Fonctions de Bessel modifiées de première espèce	611
23. Etude des I_n en variables réelles	612
24. Relations de récurrence des fonctions modifiées	613
25. Equation de Bessel modifiée	614
26. Fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce	614
27. Etude des fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce ..	615
28. Formules asymptotiques des fonctions de Bessel modifiées....	617
29. Fonctions de Kelvin.....	618
Exercices de récapitulation	620
Équations aux dérivées partielles. Étude élémentaire	621
I. Equation quasi-linéaire du premier ordre	622
1. Equation quasi-linéaire à deux variables du premier ordre....	622
2. Caractéristiques	623
3. Obtention effective des surfaces intégrales à partir des caractéristiques	624
4. Surface intégrale passant par une courbe C	625
5. Problème équivalent à trois variables.....	625
6. Intégrale première	626
7. Facteur intégrant	628
Exercices de récapitulation	629

II. Equation linéaire du deuxième ordre à deux variables	630
8. Equation linéaire du deuxième ordre à deux variables.....	630
9. Caractéristiques d'une équation linéaire à deux variables.....	631
10. Classification des équations linéaires du second ordre à deux variables.....	633
11. Réduction des équations linéaires du second ordre à deux variables à coefficients constants (termes du deuxième ordre)..	633
12. Réduction des équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants à deux variables (termes du premier ordre)..	636
13. Forme réduite pour les équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants à deux variables.....	638
14. Propriétés des solutions des équations linéaires.....	639
15. Méthode de séparation des variables.....	640
16. Solutions particulières exponentielles des équations linéaires et homogènes à coefficients constants.....	641
Exercices de récapitulation	642
III. Etude de quelques problèmes aux dérivées partielles	644
17. Rappel des propriétés des fonctions harmoniques de deux et trois variables.....	644
18. Valeur d'une fonction harmonique de trois variables au centre d'une sphère.....	644
19. Maxima et minima des fonctions harmoniques.....	645
20. Problème de Dirichlet.....	645
21. Solution du problème de Dirichlet pour la sphère.....	646
22. Propriétés particulières de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$	646
23. Application à l'équation des cordes vibrantes. Onde progressive.	647
24. Exemple physique d'ondes progressive et régressive.....	649
25. Vibrations d'une corde.....	650
26. Solutions particulières de l'équation $z''_x - 2 z'_t = 0$	652
Exercices de récapitulation	655
Réponses aux exercices	657
Chapitre I	657
Chapitre II	659
Chapitre III	668
Chapitre IV	680
Chapitre V	684
Chapitre VI	687
Chapitre VII	694
Chapitre VIII	697
Chapitre IX	706

Table des matières

Chapitre X	708
Chapitre XI	713
Chapitre XII	716
Chapitre XIII	719
Chapitre XIV	724
Chapitre XV	727
Problèmes proposés	731
Index alphabétique	741
Table des matières	753