Inhaltsverzeichnis

I. Kapitel:

Begründung der Variationsrechnung durch EULER, LAGRANGE und HAMILTON

Seite

1. Die Anfänge der Variationsrechnung bei EULER und LAGRANGE 1
   - § 1. Die Entstehung und die ältesten Probleme der Variationsrechnung . . 1
   - § 2. EULERs Polygonmethode 6
   - § 3. Die Lagrangesche Methode 16
2. Die Bedeutung der Variationsrechnung für die Physik und technische Mechanik 28
   - § 1. Die wichtigsten Variationsprinzipe 28
   - § 2. Anwendungen auf Analogiebetrachtungen 33
   - § 3. Anwendung bei Transformationen 37
3. Das homogene Problem 39
   - § 1. Die Eulerschen Gleichungen in Parameterdarstellung 39
   - § 2. Die Eulerschen Gleichungen in natürlichen Koordinaten 46
   - § 3. Anwendungen 47
     Strahlendurchgang durch isotropes Medium; MAXWELLS Theorie des Fischauges; Bestimmung aller Variationsprobleme bei denen die Extremalen Gerade sind; Flächen, bei denen sich die geodätischen Linien auf gerade Linien abbilden lassen; Hilbertsche Geometrie und Geometrie der spezifischen Maßbestimmung.
   - § 4. Indikatrix und Figuratrix 52
4. Die Hamiltonsche charakteristische Funktion und ihre Anwendungen . . 61
   - § 1. Die ersten Differentialquotienten; die Weierstraßsche und Legendresche notwendige Bedingung 61
   - § 2. Transversalitätsbedingung (freie Randbedingungen) 69
     Trichter von M. E. SINCLAIR; Kurs im ortsabhängigen Strömungsfeld; maximaler Unternehmergewinn; Kapillarität; Balkentheorie.
   - § 3. Historische Notizen über HAMILTON und seine grundlegenden Ideen; Beispiele dazu 83
     Kartesische Flächen; elementare Theorie des Schmidtschen Spiegelteleskops nach CARATHÉODORY; POINCARÉS Modell der nichteuklidischen Geometrie.
   - § 4. Hamilton-Jacobische Integrationstheorie 91
   - § 5. Weitere Anwendungen der Hamiltonschen Formeln 101
     Erdmann-Weierstraßsche Eckenbedingung; Brechungsgesetz; Ausnützung von Invarianzeigenschaften zur Herleitung von Integralen.
   - § 6. Eine Eigenschaft der Hamiltonschen charakteristischen Funktion beim Punkt-Punkt-Problem 106
   - § 7. Die Legendresche Transformation der Veränderlichen 107
   - § 8. Die kanonische Form der Gleichungen der Variationsrechnung . . . 109
     Expliziter Beweis des Hauptsatzes der Hamilton-Jacobischen Theorie bei n Veränderlichen; Störungstheorie.

Seite

§ 9. Einige Anwendungen der kanonischen Form auf physikalische und geometrische Probleme 113
Liouvillescher Satz; Extremalendichte; Croftonsche Formeln; Satz von STRAUBEL.

5. Elimination zyklischer Veränderlicher 120
§ 1. Transformation von ROUTH 120
§ 2. Transformation von Variationsproblemen, die die unabhängige Variable nicht explizit enthalten 123
§ 3. Jacobisches Prinzip der kleinsten Wirkung 124
Wurfparabel, Planetenbewegung.
§ 4. Einführung des elektronischen Brechungsindex 127
§ 5. Elimination der zyklischen Veränderlichen in der Elektronenoptik . . 129
Verallgemeinerter Satz von LIPPICH.

II. Kapitel:

Begründung der Theorie der zweiten Variation durch LEGENDRE und JACOBI

1. Die Begründung der Theorie durch LEGENDRE 132
§ 1. Die Legendresche Transformation der zweiten Variation 132
Kritik an der Legendreschen Schlußweise.
§ 2. Direkte Herleitung der Legendreschen notwendigen Bedingung nach ROUSSEL 136

2. Die Jacobische Theorie 139
§ 1. Die Jacobische Gleichung 139
§ 2. Konjugierte Punkte 145
§ 3. Der Satz von STURM 146
§ 4. Das Jacobische Theorem und die geometrische Deutung der konjugierten Punkte 148
§ 5. Beispiele zur Theorie der konjugierten Punkte 152
Die konjugierten Punkte am Äquator einer Rotationsfläche; die konjugierten Punkte am Äquator einer „gewölbten Ecke"; die konjugierten Punkte auf den geodätischen Linien einer kreiszylindrischen Dose; Fokussierung der Elektronenbahnen in einem Zylinderkondensator; maximaler Blasendruck; das Newtonsche Abbildungsgesetz in der Elektronenoptik; die konjugierten Punkte bei der Kepler-Ellipse und bei der Wurfparabel.
§ 6. Verallgemeinerung auf den Fall mehrerer unabhängiger Variabler und höherer Differentialquotienten im Variationsproblem 177
Begriff des adjungierten Differentialausdrucks; zweite Variation bei Variationsproblemen mit einer unabhängigen Veränderlichen und höheren Differentialquotienten; Theorie der zweiten Variation bei Doppelintegralen; Bericht über die Untersuchungen von H. A. SCHWARZ über das Problem der Minimalflächen.

III. Kapitel:

Die Kritik von WEIERSTRASS und DU BOIS-REYMOND und die Aufstellung hinreichender Bedingungen durch WEIERSTRASS

1. Kritik von WEIERSTRASS und DU BOIS-REYMOND 193
§ 1. Kritik der Grundlagen 193
Absolutes und relatives Minimum; eigentliches und uneigentliches Minimum.

Seite

§ 2. Variationsprobleme, bei denen der Integrand positiv ist und nur von der Richtung abhängt 197
Geknickte Extremalen.

§ 3. Das Lemma von Du Bois-Reymond und die sich daraus ergebenden Folgerungen 201
Einfache Integrale. Doppelintegrale. Beispiele.

§ 4. Weierstrass' Kritik an der Dirichletschen Schlußweise 218

2. Hinreichende Bedingung für das relative Minimum 225

§ 1. Feldbegriff und Unabhängigkeitssatz 225

§ 2. Hinreichende Bedingung für das starke Extremum beim homogenen Problem 230
Unterschied zwischen homogenem und inhomogenem Problem.

§ 3. Hinreichende Bedingung für das schwache Extremum 233

§ 4. Brennpunkte 234

§ 5. Knickung eines tragenden, einseitig eingespannten elastischen Stabes 238

§ 6. Der Knesersche Satz über die Einhüllende von Extremalenscharen . . 242

§ 7. Die zweiten Ableitungen der Hamiltonschen charakteristischen Funktion 244

§ 8. Zusammenhang der Feldtheorie mit der Fundamentalformel der zweiten Variation 249

§ 9. Ermittlung von konjugierten Punkten und Brennpunkten, wenn das Variationsproblem bei Transformationen invariant bleibt 250

IV. Kapitel:

Probleme mit Nebenbedingungen

1. Theorie der ersten Variation 253

§ 1. Allgemeine Formulierung des Problems mit Nebenbedingungen nach Lagrange 253

§ 2. Formulierung des Punkt-Punkt-Problems mit Nebenbedingungen nach Lagrange 256
Mayers Kritik an Lagranges Schlußweise.

§ 3. Vorbereitung auf den Beweis der Lagrangeschen Multiplikatorregel . 259

§ 4. Hauptsatz über unterbestimmte Systeme 263
Freie und gebundene Bogen; Erläuterung an Beispielen; Hinweis auf die Bedeutung dieser Begriffe bei der Carathéodoryschen Grundlegung der Thermodynamik; Charakteristiken der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung.

§ 5. Beweis der Lagrangeschen Multiplikatorenregel 275

§ 6. Bemerkungen zur Lagrangeschen Multiplikatorenregel. Das Mayersche Problem 277
Normale und anormale Bögen; Aufspaltungserscheinungen; Klasse eines Extremalenbogens; Lagrangesche Gleichungen in kanonischer Form; Lagrangesche Faktoren beim isoperimetrischen Problem; das Mayersche Problem; Zermelos Navigationsproblem.

§ 7. Formulierung des Lagrangeschen Problems mit variablen Grenzen und Randfunktion (Problem von Bolza) 284

Seite

§ 8. Gleichzeitige Variation von abhängigen und unabhängigen Veränderlichen bei Variationsproblemen ohne Nebenbedingungen und ohne Randfunktionen 287
Variationsprobleme mit einer unabhängigen und einer abhängigen Veränderlichen; Variationsprobleme mit einer unabhängigen und mehreren abhängigen Veränderlichen; Variationsprobleme mit r unabhängigen und k abhängigen Veränderlichen.

§ 9. Herleitung der freien Randbedingungen für die erste Variation . . . 295

2. Einleitung in die Theorie der zweiten Variation 298

§ 1. Herleitung der Differentialgleichungen und der Randbedingungen für das akzessorische Problem. Bedingung für das Verschwinden der zweiten Variation 298

§ 2. Hinweise für die praktische Behandlung von Aufgaben der zweiten Variation beim allgemeinen Lagrangeschen Problem 303

3. Beispiele 305

§ 1. Kürzeste Entfernung von Raumkurven und Flächen 305
Kürzeste Entfernung zweier Raumkurven; kürzeste Entfernung zweier Flächen.

§ 2. Ebene Probleme der Elastostatik 309
Stabilität der beiderseits durch Klemmen eingespannten Elastica; der in Klemme und Hülse, in Klemme und Öse gelagerten Elastica; des auf zwei Stützen frei aufliegenden dünnen, in der Mitte belasteten Stabes.

§ 3. Stabilität der Trennungsflächen zwischen Flüssigkeiten 326

V. Kapitel:

Die Verwendung der Quasikoordinaten

§ 1. Historische Bemerkungen 329
Die Eulerschen Gleichungen für die Bewegung eines starren Körpers.

§ 2. Allgemeine Erörterung der Methode der Quasikoordinaten 336

§ 3. Anwendung der Quasikoordinaten bei räumlichen Problemen der Elastostatik von Stäben. KIRCHHOFFS Analogie 339

§ 4. Integrale der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen 342
Energieintegral. Drehimpulsintegral.

§ 5. Gegenüberstellungen gemäß der Kirchhoffschen Analogie 343

§ 6. Gemeinsamer Ansatz für verschiedene Stabilitätsprobleme der räumlichen Elastica 344
Beispiele: gerade homogene Stäbe unter Druck und Drill.

VI. Kapitel:

Zusätze zur Theorie der Variationsprobleme mit mehreren Veränderlichen

1. Probleme mit einer unabhängigen und mehreren abhängigen Veränderlichen 358

§ 1. Der Hilbertsche Unabhängigkeitssatz in Räumen mit mehr als zwei Dimensionen 358

§ 2. Relative und absolute Integralinvarianten; Lagrangesche Klammern 364

§ 3. Der allgemeine Enveloppensatz 370

Seite

§ 4. Anwendung des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes in der geometrischen Optik 373
Satz von MALUS.

2. Probleme mit mehreren unabhängigen und mehreren abhängigen Veränderlichen 376

§ 1. Einleitung. Unterschied des Feldbegriffs bei Problemen mit einer und mit mehreren unabhängigen Veränderlichen 376

§ 2. Alternierende Differentialformen. Verallgemeinerung der Integralsätze von STOKES und GAUSS. Transversalität 382

§ 3. Umkehrsatz von POINCARÉ. Bedingungen für das identische Verschwinden der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen. Darstellung von geschlossenen Differentialformen 401

§ 4. Verallgemeinerung des Hilbertschen Unabhängigkeitsintegrals 410
Allgemeine Feldtheorie von LEPAGE; Feldtheorien von DE DONDER-WEYL und von CARATHÉODORY; Variationsprobleme mit beweglichem Rand.

§ 5. Verallgemeinerung des Hilbertschen Problems. Abschließende Bemerkungen 433

3. Die Sätze von E. NOETHER 437

§ 1. Einleitung. Der Noethersche Satz für endliche kontinuierliche Transformationsgruppen 437
Beispiele; Erhaltungssätze der Newtonschen Mechanik.

§ 2. Der Noethersche Satz für unendliche kontinuierliche Transformationsgruppen 445
Beispiele; Hilbertsche Fassung der allgemeinen physikalischen Feldtheorie.

VII. Kapitel:

Die direkten Methoden der Variationsrechnung

1. Existenz des Minimums 452

§ 1. Einleitung 452

§ 2. Stetigkeit und Halbstetigkeit von Funktionalen 455

§ 3. Existenz des Minimums 459
Beispiele.

§ 4. Anwendung des Existenzbeweises auf den Nachweis periodischer Lösungen bei einem Schwingungsproblem 465

2. Numerische Methoden 468

§ 1. Die Ritzsche Methode 468
Die Methode von RITZ und verwandte Methoden.

§ 2. Die Behandlung des Duffingschen Schwingungsproblems nach HAMEL 478

§ 3. Anwendung der Rayleigh-Ritzschen Methode zur Berechnung von Eigenwerten 479
Schwingende Saite; Stimmgabel; piezoelektrische Schwingungen; doppelwandiger Druckstab; Linsenformel für das Elektronenmikroskop

§ 4. Kennzeichnung der höheren Eigenwerte durch ein Maximum-Minimum-Prinzip 490

§ 5. Prinzip der formalen Differentiation eines Extremums 493
Anwendungen; Satz von H. SCHAEFER über Eigenwertpaare.

VIII. Kapitel:

Das Prinzip von FRIEDRICHS und seine Anwendung auf elastostatische Probleme

Seite
§ 1. Einleitendes Beispiel aus der Fachwerktheorie 498
§ 2. Allgemeine Umformung gewöhnlicher Extremalprobleme 505
§ 3. Allgemeine Umformung von Variationsproblemen 507
§ 4. Anwendung auf die Balkentheorie 513
§ 5. Allgemeine Fassung der Prinzipe von DIRICHLET und CASTIGLIANO 515
§ 6. Anwendung auf das Torsionsproblem elastischer Stäbe 531

IX. Kapitel:

Finslersche Geometrie

§ 1. Einleitung 542
§ 2. Die Invarianten der Indikatrix 549
Landsbergscher Winkel; Berwaldscher Hauptskalar; indizierende Ellipse; Element- und Transversalitätsvektor.
§ 3. Differentiation nach Länge, Breite und Winkel 554
§ 4. Endlicher Längenabstand, Breitenabstand und Winkel 556
§ 5. Flächeninhalt 557
§ 6. Die extremale Krümmung von Kurven 560
§ 7. Das Koordinatensystem der Länge und Breite 564
§ 8. Das Analogon zum Gaußschen Krümmungsmaß 565
Geometrische Deutungen.
§ 9. Cartansche Vertauschungsformeln. Bianchische Identität 570
§ 10. Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung 573
§ 11. Spezielle Finslersche Räume 576
Finslersche Geometrien, bei denen der Gauß-Bonnetsche Satz über die Totalkrümmung gilt (Landsbergsche Geometrie); Variationsprobleme, bei denen Kurven konstanten Breitenabstandes auch Kurven konstanten Längenabstandes sind (Riemannsche Geometrie); Geometrien, bei denen die Extremalen durch lineare Gleichungen dargestellt werden können.

X. Kapitel:

Zusätze und spezielle Probleme

§ 1. Das Umkehrproblem der Variationsrechnung 581
§ 2. Die Eulersche Knicklast. Ermittlung der Knicklast unter Berücksichtigung des Einflusses der Längenänderung der Stäbe 586
§ 3. Knickung unter Berücksichtigung der Eigenlast 594
§ 4. Das Ausbeulen von ebenen Platten (Bryansche Gleichung) 596
§ 5. Herleitung von Randbedingungen für partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung in einer abhängigen und in zwei unabhängigen Veränderlichen aus einem zugehörigen Variationsproblem, dargestellt am Beispiel der Biegung der dünnen Platte 600
§ 6. Knickung des durch Krümmung versteiften Meßbandes 605
§ 7. Vollkommene optische Instrumente 611

Anhang

Seite

Historische Bemerkungen

I. Über die Arbeiten der Brüder BERNOULLI 614

II. Über NEWTONS Problem einer axial angeströmten Rotationsfläche kleinsten Widerstandes 616

III. Über die Geschichte des Prinzips der kleinsten Wirkung 621

Anmerkungen 632

Namenverzeichnis. 669

Sachverzeichnis 673