



# 数理物理学の方法 第4巻

## 目次

序 文

第4章 楕円型微分方程式, とくにポテンシャル論 .....	1
§ 1. 基礎 .....	1
1. ラプラスおよびポアソンの微分方程式とこれと同類の方程式	
2. 質量分布のポテンシャル	
3. グリーンの公式と応用	
4. 分布ポテンシャルの導関数	
§ 2. ポアソン積分とその結果 .....	16
1. 境界値問題とグリーン函数	
2. 円と球に対するグリーン函数. 球と半空間に対するポアソン積分	
3. ポアソンの公式からみちびかれる結論	
§ 3. 平均値定理とその応用 .....	26
1. 斉次および非斉次な平均値方程式	
2. 平均値定理の逆	
3. 空間分布ポテンシャルに対するポアソンの方程式	
4. 他の楕円型微分方程式に対する平均値定理	
§ 4. 境界値問題 .....	39
1. まえおき. 境界値と領域に対する連続的依存	
2. 交代法による境界値問題の解	
3. 十分に滑らかな境界をもつ領域に対する積分方程式法	
4. 境界値問題に対するその他の注意	
§ 5. 一般的な楕円型微分方程式に対する境界値問題: 解の一意性 .....	51
1. 線形の微分方程式	
2. 準線形の微分方程式	

3. モンジュールアンペールの微分方程式に関するレリッヒの定理

## § 6. 楕円型微分方程式を解く積分方程式法 ..... 56

1. 解のつくり方. 基本解
2. 境界値問題

## 第4章への追加 ..... 64

1. 境界値問題の一般化. ウィーナーの定理
2. 非線形の微分方程式

## 第5章 2変数の双曲型微分方程式 ..... 71

### § 1. 準線形微分方程式の特性曲線 ..... 71

1. 特性曲線の定義
2. 積分曲面上における特性曲線
3. 不連続線としての特性曲線. 波面

### § 2. 一般の微分方程式の問題に対する特性曲線 ..... 80

1. 一般の2階微分方程式
2. 高階の微分方程式
3. 連立微分方程式
4. 任意の点変換に対する特性曲線の不変性
5. 流体力学からの例

### § 3. 一意性と依存領域 ..... 86

1. 伝播現象に関する基本的なことから
2. 一意性の証明

### § 4. リーマンの積分法 ..... 91

1. リーマンの表示公式
2. 補足的注意. 特性初期値問題
3. 例. 電信方程式

### § 5. ピカールの反復法による微分方程式 $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ の解 ..... 96

1. 予備的注意
2. 初期値問題の解
3. 解の一意性
4. パラメーターに関する連続性と微分可能性
5. 解の依存領域

### § 6. 1階連立方程式への一般化と応用 ..... 102

1. 共通の線形主部をもつ2階連立微分方程式



2.	1 階の正準双曲型連立微分方程式	
§ 7.	一般の 2 階準線形方程式 .....	104
1.	特性微分方程式の完全系	
2.	初期値問題の解	
§ 8.	一般の方程式 $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ .....	111
1.	共通の主部をもつ準線形連立方程式	
2.	一般の場合における初期値問題の解	
第 5 章	への追加 .....	116
§ 1.	複素数の導入. 複素変数による双曲型から楕円型への移行 .....	116
§ 2.	楕円型の場合における解の解析性 .....	117
1.	函数論的な予備的注意	
2.	$\Delta u = f(x, y, u, p, q)$ の解の解析性	
3.	一般の場合の微分方程式 $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ に関する注意	
§ 3.	2 変数の場合の特性理論に対する注意 .....	121
§ 4.	モンジュ - アンペールの方程式の特殊性 .....	122
第 6 章	変数の数が 2 より多い双曲型微分方程式 .....	125
§ 1.	特性方程式 .....	125
1.	2 階の準線形微分方程式	
2.	線形微分方程式. 特性射線	
§ 2.	解の不連続性面としての特性多様体. 波面 .....	134
1.	2 階の不連続性	
2.	高度の不連続性のにない手としての線形微分方程式における波面	
3.	特性多様体に沿った微分方程式. 射線に沿った不連続性の伝播	
4.	物理的意味. 影の限界	
5.	射線コノイド. リーマンの計量との関連	
6.	ホイヘンスの波面構成法. 射線錐と方向の伝播	
7.	射線錐と法線錐	
8.	例. 3 次元のポアソンの波動方程式	
§ 3.	高階の問題における特性概念 .....	149
1.	高階の線形微分方程式	
2.	連立微分方程式. 流体力学	
3.	別な連立方程式. 結晶光学	



§ 4.	初期値問題における一意性定理と依存領域 .....	155
1.	波動方程式	
2.	微分方程式 $u_{tt} - \Delta u + \frac{\lambda}{t} u_t = 0$ (ダルブー)	
3.	エーテル中におけるマックスウェルの方程式	
4.	結晶光学の微分方程式における一意性と依存領域	
5.	依存領域と作用領域に関する注意. 依存領域の凸な性質の必要性	
§ 5.	定数係数の2階双曲型線形微分方程式 .....	162
1.	解のつくり方	
2.	変数低減法に関する注意	
3.	解の詳しい考察. ホイヘンスの原理	
4.	解の検証	
5.	非斉次方程式の積分	
6.	輻射の問題	
7.	方程式 $\Delta u + c^2 u = u_{tt}$ および電信方程式に対する初期値問題	
§ 6.	平均値法. 波動方程式とダルブーの方程式 .....	188
1.	平均値に対するダルブーの微分方程式	
2.	波動方程式との関連および波動方程式の解法	
3.	波動方程式の輻射の問題	
4.	フリードリクススの定理	
§ 7.	超双曲型微分方程式と定数係数の2階の一般微分方程式 .....	194
1.	アスガイルソンの一般平均値定理	
2.	平均値定理の第二の証明	
3.	波動方程式に平均値定理を応用すること	
4.	波動方程式の特性初期値問題の解	
5.	別な応用. 共焦点な楕円面に対する平均値定理	
§ 8.	双曲型でない初期値問題に関する考察 .....	202
1.	球面における平均値による函数の決定	
2.	初期値問題への応用	
§ 9.	初期値問題を解くアダマールの方法 .....	208
1.	予備的注意. 基本解. 一般的方法	
2.	空間次元 $m = 2$ の場合の一般波動方程式	
3.	空間次元 $m = 3$ の場合における一般化された波動方程式	
§ 10.	波の概念に関する注意と輻射問題 .....	227
1.	一般的事実. 無歪進行波	



2. 球面波	
3. 輻射とホイヘンスの原理	
<b>第6章への追加</b> .....	<b>233</b>
§ 1. 結晶光学の微分方程式 .....	233
1. 結晶光学の法線面と射線面	
2. 法線面の形	
3. 射線面	
4. 連立微分方程式を一つの6階あるいは4階微分方程式に帰着させること	
5. フーリエの方法による解	
6. 核 $K$ について	
7. 光学における応用, 円錐状の屈折	
§ 2. 高階の問題における依存領域 .....	245
§ 3. 広義のホイヘンスの原理と接続可能な初期条件 .....	248
§ 4. 積分関係式による微分方程式のおきかえ, 特性概念の拡張 .....	249
<b>第7章 変分法による境界値問題と固有値問題の解</b> .....	<b>251</b>
§ 1. 予備的注意 .....	253
1. 円に対するディリクレの原理	
2. 一般的な問題設定	
3. 2次の計量をもつ線形函数空間, 定義	
4. 境界条件	
§ 2. 第一種境界値問題 .....	263
1. 問題の設定	
2. グリーンの公式, $D$ と $H$ との間の主不等式, 一意性	
3. 最小列と境界値問題の解	
§ 3. 境界値が0となるときの固有値問題 .....	268
1. 積分不等式	
2. 第一固有値問題	
3. 大きい固有値とその固有函数, 完全性	
§ 4. 2つの独立変数の場合の境界値 .....	276
§ 5. 極限函数のつくり方と積分 $E, D, H$ の収束 .....	279
1. 極限函数のつくり方	
2. 積分 $D$ と $H$ の収束	



§ 6.	第二種と第三種の境界条件. 境界値問題 .....	290
1.	グリーンの公式と境界条件	
2.	境界値問題と変分問題の定式化	
3.	許容領域の類の制限	
4.	最小値問題と境界値問題の等値性. 一意性	
5.	変分問題と境界値問題との解	
§ 7.	第二種と第三種境界条件の場合における固有値問題 .....	295
§ 8.	第二種と第三種境界条件のさい基礎となる領域についての論議 ...	298
1.	$\Re$ 型の領域	
2.	領域に対する制約条件の必要なこと	
§ 9.	補遺と課題 .....	305
1.	$\Delta u$ のグリーン函数	
2.	二重極特異点	
3.	第二種境界条件に対する 2 変数の $\Delta u = 0$ の場合における境界上の行動	
4.	領域に連続的に依存すること	
5.	無限にひろがった領域 $G$ への理論の転用	
6.	4 階の微分方程式への方法の応用. 板の横変形と振動	
7.	2 次元の弾性論における第一種境界値問題と固有値問題	
8.	極限函数をつくる別な方法	
§ 10.	プラトーの問題 .....	318
1.	問題の設定と解への準備	
2.	変分関係式の証明	
3.	変分問題の解の存在	
文 献	.....	327
索 引	.....	329
あとがき	.....	333

