数理物理学の方法 第2巻

目　　次

原著者の序文
監訳者のことば
第5章　数理物理学における振動の問題と固有値問題……………………… 1
§ 1. 線形微分方程式についての若干の注意……………………………… 1
1.　一般的なこと——加法性
2.　同次型の問題と非同次型の問題，境界条件
3.　形式的な関係，共役微分式，グリーンの公式
4.　連立1次方程式の極限としての線形函数方程式
§ 2. 有限の自由度をもつ系………………………………………………… 7
1.　主振動，正規座標，運動の一般論
2.　振動する系の一般的性質
§ 3. 弦　の　振　動……………………………………………………………11
1.　一様な弦の自由振動
2.　強　制　振　動
3.　一様でない弦とスツルム=リューヴィル型の固有値問題
§ 4. 棒　の　振　動……………………………………………………………19
§ 5. 膜　の　振　動……………………………………………………………22
1.　一様な膜の一般固有値問題
2.　強　制　振　動
3.　節　　　線
4.　長　方　形　の　膜
5.　円形膜，ベッセル函数
6.　一　様　で　な　い　膜
§ 6. 板　の　振　動……………………………………………………………30
1.　一般的なこと
2.　円　板　の　場　合
§ 7. 固有函数の方法についての一般的事項…………………………………31
1.　振動問題と平衡問題における方法

2. 熱伝導と固有値問題
3. 固有値問題が生じてくるその他の例

§ 8. 3次元連続体の振動……………………………………………………36

§ 9. ポテンシャル論の境界値問題と固有函数……………………………37

1. 円，球，球殻
2. 柱　領　域
3. ラーメの問題

§ 10. スツルム＝リューヴィル型の問題．特異境界点 ……………………46

1. ベッセル函数
2. 任意位数のルジャンドル函数
3. ヤコビの多項式とチェビシェフの多項式
4. エルミートの多項式とラゲールの多項式

§ 11. スツルム＝リューヴィル型微分方程式の解の漸近的行動 …………52

1. 独立変数の値が無限に増大する場合の解の有界性
2. 精密化（ベッセル函数）
3. パラメーターの値が増大するときの解の有界性
4. 解の漸近表示
5. スツルム＝リューヴィル型の固有函数の漸近表示

§ 12. 連続スペクトルをもつ固有値問題……………………………………60

1. 三　角　函　数
2. ベッセル函数
3. 無限平面の振動の方程式の固有値問題
4. シュレーディンガーの固有値問題

§ 13. 摂　動　法……………………………………………………………63

1. 単純固有値の場合
2. 重複固有値の場合
3. 摂動法の実例

§ 14. グリーン函数．微分方程式と積分方程式……………………………69

1. グリーン函数と常微分方程式の境界値問題
2. グリーン函数の作り方と広義のグリーン函数
3. 微分方程式の問題と積分方程式の問題の同値性
4. 高階常微分方程式
5. 偏微分方程式の場合

§ 15. グリーン函数の例……………………………………………………88

1. 常微分方程式
2. 円および球に対する Δu のグリーン函数
3. グリーン函数と等角写像
4. 球面に対するポテンシャル方程式のグリーン函数
5. 直方体の表面に対する方程式 $\Delta u=0$ のグリーン函数
6. 長方形の内部に対する Δu のグリーン函数
7. 円環に対するグリーン函数

§ 16. 第5章の補足……………………………………………………104

1. 弦の振動の例
2. 自由にたれた綱の振動とベッセル函数
3. 振動方程式が具体的に解ける例——マシュー函数
4. 境界条件の中のパラメーター
5. 連立微分方程式に対するグリーンテンソル
6. 方程式 $\Delta u+\lambda u=0$ の解の解析接続
7. $\Delta u+\lambda u=0$ の解の節線に関する一定理
8. 無限重の重複固有値の実例
9. 展開定理の成り立つ限界

第6章　固有値問題への変分法の応用……………………………………111

§ 1. 固有値の極値性……………………………………………………112

1. 古典的な極値性
2. 補足と拡張
3. 領域が連結でないときの固有値問題
4. 固有値の最大-最小性

§ 2. 極値としての固有値の性質から導かれる一般的結論……………120

1. 一般的定理
2. 固有値の非有界性
3. スツルム=リューヴィル型の問題における固有値の漸近的行動
4. 特異な微分方程式
5. 固有値の増加についての注意——負の固有値
6. 固有値の連続性

§ 3. 完全性定理と展開定理……………………………………………135

1. 固有函数の完全性
2. 展開定理

3. 展開定理の精密化

§ 4. 固有値の漸近的分布 …… 140

1. 長方形に対する微分方程式 $\Delta u+\lambda u=0$
2. 有限個の正方形あるいは立方体から成る領域における微分方程式：$\Delta u+\lambda u=0$
3. 一般の微分方程式 $L[u]+\lambda\rho u=0$ への拡張
4. 任意の領域に対する固有値の漸近的分布法則
5. 微分方程式 $\Delta u+\lambda u=0$ の固有値の漸近的分布法則の強い形

§ 5. シュレーディンガー型の固有値問題 …… 154

§ 6. 固有函数の節 …… 159

§ 7. 第6章の補足と問題 …… 164

1. 完全性から固有値の最小性を導く
2. 零点をもたないことによって第一固有函数を規定すること
3. 固有値のもつ別の最小性
4. 板の振動の場合の固有値の漸近的分布
5.～7. 問 題
8. 境界条件の中のパラメーター
9. 閉曲面に対する固有値問題
10. 特異点があらわれる場合の固有値の評価
11. 膜と板に対する最小定理
12. 質量分布が変動するときの最小問題
13. スツルム=リューヴィル型の問題の節点と最大-最小原理

第7章 固有値問題によって定義される函数 …… 173

§ 1. 2階線形微分方程式についての若干の注意 …… 173

§ 2. ベッセル函数 …… 174

1. 積 分 変 換
2. ハンケル函数
3. ベッセル函数とノイマン函数
4. ベッセル函数の積分表示
5. ハンケル函数とベッセル函数の他の積分表示
6. ベッセル函数の整級数展開
7. ベッセル函数の間の関係
8. ベッセル函数の零点
9. ノイマン函数

§ 3. ルジャンドルの球函数……207

1. シュレーフリ積分
2. ラプラースの積分表示
3. 第二種のルジャンドル函数
4. ルジャンドルの陪函数（高次のルジャンドル函数）

§ 4. ルジャンドル，チェビシェフ，エルミート，ラゲールの微分方程式と積分変換……211

1. ルジャンドル函数
2. チェビシェフ函数
3. エルミート函数
4. ラゲール函数

§ 5. ラプラースの球函数……215

1. $2n+1$ 個の n 位球函数
2. 函数系の完全性
3. 展開定理
4. ポアッソン積分
5. マックスウェル=シルベスターによる球函数の表わし方

§ 6. 漸近展開……225

1. スターリングの公式
2. 変数が増大するときのハンケル函数とベッセル函数の漸近値
3. 鞍点法
4. パラメーターおよび変数の大きい値に対するハンケルおよびベッセル函数の計算への鞍点法の応用
5. 鞍点法についての一般的注意
6. ダルブーの方法
7. ルジャンドルの多項式の漸近展開へのダルブーの方法の応用

参考文献……239

索　引……241