



# INHALT

1. NORMEN, ARITHMETISCHE OPERATIONEN UND KORREKT KONZIPIERTE RECHENVERFAHREN .....	1
1.0. <i>Einführung</i> .....	1
1.1. <i>Normen von Vektoren und Matrizen</i> .....	1
1.1.1. <i>Konvergente Matrizen</i> .....	14
1.2. <i>Gleitkommaarithmetik und Rundungsfehler</i> .....	18
1.3. <i>Korrekt konzipierte Berechnungen</i> .....	22
2. NUMERISCHE LÖSUNG VON LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMEN UND MATRIZENINVERSION .....	27
2.0. <i>Einführung</i> .....	27
2.1. <i>Der Gaußsche Algorithmus</i> .....	30
2.1.1. <i>Abschätzung des benötigten Rechenaufwandes</i> .....	36
2.1.2. <i>A priori-Fehlerschätzungen; Anzahl der Bedingungen</i> .....	39
2.1.3. <i>A posteriori-Schätzungen für Fehler</i> .....	49
2.2. <i>Varianten des Gaußschen Algorithmus</i> .....	52
2.3. <i>Direkte Faktorisierungsverfahren</i> .....	55
2.3.1. <i>Symmetrische Matrizen (das Cholesky-Verfahren)</i> .....	57
2.3.2. <i>Die Jacobischen Tridiagonalmatrizen</i> .....	58
2.3.3. <i>Tridiagonal-Block-Matrizen</i> .....	61
2.4. <i>Iterationsverfahren</i> .....	64
2.4.1. <i>Iteration in Gesamtschritten (Jacobi)</i> .....	67
2.4.2. <i>Das Iterationsverfahren von Gauß-Seidel (Iteration in Einzelschritten)</i> .....	69
2.4.3. <i>Das Restkorrekturverfahren</i> .....	71
2.4.4. <i>Positiv definite Systeme</i> .....	73
2.4.5. <i>Blockiterationen</i> .....	75
2.5. <i>Die Beschleunigung von Iterationsverfahren</i> .....	76
2.5.1. <i>Praktische Anwendungen von Beschleunigungsverfahren</i> .....	81
2.5.2. <i>Verallgemeinerungen des Beschleunigungsverfahrens</i> .....	83
2.6. <i>Matrizeninversion durch Iterationen höherer Ordnung</i> .....	85
3. ITERATIONSVERFAHREN ZUR LÖSUNG NICHTLINEARER GLEICHUNGEN .....	89
3.0. <i>Einführung</i> .....	89
3.1. <i>Das Verfahren der schrittweisen Näherung für eine Gleichung</i> .....	90
3.1.1. <i>Fehlerfortpflanzung</i> .....	95
3.1.2. <i>Iterationsverfahren zweiter und höherer Ordnung</i> .....	98

3.2. <i>Einige spezielle Iterationsverfahren</i> .....	100
3.2.1. Die einfache Iteration oder das Sehnens-Verfahren (Verfahren erster Ordnung) .....	101
3.2.2. Das Newtonsche Näherungsverfahren (Verfahren zweiter Ordnung) .....	102
3.2.3. Die regula falsi (Verfahren von gebrochener Ordnung) .....	104
3.2.4. Das $\delta^2$ -Verfahren von Aitken (Verfahren beliebiger Ordnung) .....	107
3.3. <i>Iterationsverfahren für Gleichungssysteme</i> .....	114
3.3.1. Einige spezielle Iterationsschemata für Gleichungssysteme .....	118
3.3.2. Die Konvergenz des Newtonschen Näherungsverfahrens .....	121
3.3.3. Ein spezielles Beschleunigungsverfahren für nichtlineare Systeme .....	126
3.4. <i>Spezielle Verfahren für Polynome</i> .....	129
3.4.1. Berechnung der Polynome und ihrer Ableitung (Horner-Schema) .....	130
3.4.2. Sturmsche Ketten .....	132
3.4.3. Das Bernoullische Verfahren .....	135
3.4.4. Das Verfahren von Bairstow .....	137
4. <i>BERECHNUNG VON EIGENWERTEN UND EIGENVEKTOREN</i> .....	141
4.0. <i>Einführung</i> .....	141
4.1. <i>Korrekte Formulierung der Eigenwertprobleme. Fehlerabschätzungen</i> .....	142
4.1.1. Fehlerabschätzungen a posteriori .....	147
4.2. <i>Das Potenzverfahren</i> .....	154
4.2.1. Beschleunigung des Potenzverfahrens .....	158
4.2.2. Intermediäre Eigenwerte und Eigenvektoren (Orthogonalisierung, Ordnungsniedrigung, inverse Iteration) .....	160
4.3. <i>Verfahren, die auf der Transformation von Matrizen beruhen</i> .....	167
5. <i>GRUNDLAGEN DER THEORIE DER POLYNOME. APPROXIMATION</i> .....	185
5.0. <i>Einführung</i> .....	185
5.1. <i>Der Weierstraßsche Approximationssatz und Bernsteinsche Polynome</i> .....	192
5.2. <i>Die Interpolationspolynome</i> .....	196
5.2.1. Der punktweise Fehler in Interpolationspolynomen .....	199
5.2.2. Die Hermiteische oder oskulierende Interpolation .....	201
5.3. <i>Approximation nach der Methode der kleinsten Quadrate</i> .....	203
5.3.1. Konstruktion orthonormierter Funktionensysteme .....	208
5.3.2. Gewogene Approximationen nach der Methode der kleinsten Quadrate .....	211
5.3.3. Einige Eigenschaften von Systemen orthogonaler Polynome .....	213
5.3.4. Punktweise Konvergenz der nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Approximationspolynome .....	215
5.3.5. Diskrete Approximationen nach der Methode der kleinsten Quadrate .....	221
5.4. <i>Polynome der „besten“ Approximation</i> .....	232
5.4.1. Der Fehler bei den Polynomen der besten Näherung .....	234
5.4.2. Tschebyschewsche Polynome .....	237
5.5. <i>Trigonometrische Approximation</i> .....	240
5.5.1. Trigonometrische Interpolation .....	241
5.5.2. Trigonometrische Approximationen nach der Methode der kleinsten Quadrate, Fourierreihen .....	249
5.5.3. „Beste“ trigonometrische Approximation .....	252

6. DIFFERENZEN, INTERPOLATIONSPOLYNOME UND NÄHERUNGSDIFFERENTIATION.....	257
6.0. <i>Einführung</i> .....	257
6.1. <i>Das Newtonsche Interpolationspolynom und Differenzenquotienten</i> .....	257
6.2. <i>Iterative lineare Interpolation</i> .....	270
6.3. <i>Vorwärts genommene Differenzen und äquidistante Interpolationspunkte</i> .....	272
6.3.1. <i>Interpolationspolynome und Restglieder für äquidistante Punkte</i> .....	276
6.3.2. <i>Zentrale Interpolationsformeln</i> .....	281
6.3.3. <i>Bemerkungen zur Interpolationspraxis</i> .....	285
6.3.4. <i>Divergenz von Interpolationspolynomfolgen</i> .....	287
6.4. <i>Der Kalkül der Differenzenoperatoren</i> .....	293
6.5. <i>Numerische Differentiation</i> .....	300
6.5.1. <i>Differentiation unter Benutzung allgemeiner Stützstellen</i> .....	301
6.5.2. <i>Differentiation unter Benutzung äquidistanter Stützstellen</i> .....	305
6.6. <i>Interpolation bei mehreren Variablen</i> .....	307
7. NUMERISCHE INTEGRATION.....	313
7.0. <i>Einführung</i> .....	313
7.1. <i>Interpolatorische Quadraturen</i> .....	316
7.1.1. <i>Die Newton-Coteschen Quadraturformeln</i> .....	322
7.1.2. <i>Bestimmung der Koeffizienten</i> .....	328
7.2. <i>Rundungsfehler und Formeln mit gleichen Koeffizienten</i> .....	333
7.2.1. <i>Quadraturformeln mit gleichen Koeffizienten</i> .....	336
7.3. <i>Die Quadraturformeln von Gauß; der maximale Genauigkeitsgrad</i> .....	340
7.4. <i>Quadraturformeln mit Gewichtsfunktion</i> .....	345
7.4.1. <i>Gauß-Tschebyschewsche Quadraturformeln</i> .....	348
7.5. <i>Zusammengesetzte Quadraturformeln</i> .....	350
7.5.1. <i>Periodische Funktionen und die Trapezregel</i> .....	353
7.5.2. <i>Konvergenz für stetige Funktionen</i> .....	355
7.6. <i>Singuläre Integrale; unstetige Integranden</i> .....	359
7.6.1. <i>Sprungstellen mit endlicher Sprunghöhe als Unstetigkeitsstellen</i> .....	360
7.6.2. <i>Integranden mit Unendlichkeitsstellen</i> .....	360
7.6.3. <i>Unendliche Integrationsgrenzen</i> .....	364
7.7. <i>Mehrfache Integrale</i> .....	366
7.7.1. <i>Anwendung von Interpolationspolynomen</i> .....	368
7.7.2. <i>Unbestimmte Koeffizienten (und Knoten)</i> .....	370
7.7.3. <i>Trennung der Variablen</i> .....	373
7.7.4. <i>Zusammengesetzte Formeln für mehrfache Integrale</i> .....	375
8. NUMERISCHE LÖSUNG VON GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN .....	378
8.0. <i>Einführung</i> .....	378
8.1. <i>Methoden, die auf der Approximation der Ableitung beruhen: das Euler-Cauchysche Polygonzugverfahren</i> .....	381
8.1.1. <i>Verbesserung der Genauigkeit der numerischen Lösung</i> .....	386

8.1.2. Rundungsfehler .....	388
8.1.3. Zentrale Differenzenverfahren .....	391
8.1.4. Ein divergentes Verfahren mit einem Abbruchfehler höherer Ordnung .....	394
8.2. <i>Mehrschrittverfahren, die auf Quadraturformeln beruhen</i> .....	398
8.2.1. Fehlerabschätzungen für die Vorgabe-Korrektur-Verfahren .....	403
8.2.2. Änderung der Maschenweite .....	407
8.3. <i>Ein-Schritt-Verfahren</i> .....	409
8.3.1. Finite Taylorentwicklungen .....	412
8.3.2. Ein-Schritt-Verfahren, die auf Quadraturformeln beruhen .....	415
8.4. <i>Lineare Differenzgleichungen</i> .....	420
8.5. <i>Verträglichkeit, Konvergenz und Stabilität von Differenzenverfahren</i> .....	425
8.6. <i>Differentialgleichungen höherer Ordnung und Differentialgleichungssysteme</i> .....	433
8.7. <i>Randwert- und Eigenwertprobleme</i> .....	437
8.7.1. Anfangswertverfahren .....	440
8.7.2. Finite Differenzenverfahren .....	444
8.7.3. Eigenwertprobleme .....	451
9. DIFFERENZENVERFAHREN FÜR PARTIELLE DIFFERENTIAL- GLEICHUNGEN .....	458
9.0. <i>Einführung</i> .....	458
9.0.1. Vereinbarungen zur Bezeichnungsweise .....	460
9.1. <i>Die Laplacesche Differentialgleichung in einem Rechteck</i> .....	461
9.1.1. Anwendung der Matrixschreibweise .....	468
9.1.2. Ein Eigenwertproblem für den Laplaceschen Operator .....	474
9.2. <i>Lösung Laplacescher Differenzgleichungen</i> .....	479
9.2.1. Linien- oder Blockiterationen .....	488
9.2.2. Iterationsverfahren mit Richtungsänderung .....	492
9.3. <i>Die Wellengleichung und ein äquivalentes System</i> .....	496
9.3.1. Differenzenapproximationen und Abhängigkeitsbereiche .....	503
9.3.2. Konvergenz von Differenzenlösungen .....	509
9.3.3. Differenzenverfahren für ein hyperbolisches System erster Ordnung .....	514
9.4. <i>Die Wärmeleitungsgleichung</i> .....	519
9.4.1. Implizite Verfahren .....	524
9.5. <i>Allgemeine Theorie: Konsistenz, Konvergenz und Stabilität</i> .....	533
9.5.1. Weitere Konsequenzen der Stabilität .....	541
9.5.2. Der Stabilitätstest von J. von Neumann .....	542
LITERATUR .....	550
SACHREGISTER .....	553

