

INHALT

1. NORMEN, ARITHMETISCHE OPERATIONEN UND KORREKT KONZIPIERTE RECHENVERFAHREN	1
1.0. <i>Einführung</i>	1
1.1. <i>Normen von Vektoren und Matrizen</i>	1
1.1.1. <i>Konvergente Matrizen</i>	14
1.2. <i>Gleitkommaarithmetik und Rundungsfehler</i>	18
1.3. <i>Korrekt konzipierte Berechnungen</i>	22
2. NUMERISCHE LÖSUNG VON LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMEN UND MATRIZENINVERSION	27
2.0. <i>Einführung</i>	27
2.1. <i>Der Gaußsche Algorithmus</i>	30
2.1.1. <i>Abschätzung des benötigten Rechenaufwandes</i>	36
2.1.2. <i>A priori-Fehlerschätzungen; Anzahl der Bedingungen</i>	39
2.1.3. <i>A posteriori-Schätzungen für Fehler</i>	49
2.2. <i>Varianten des Gaußschen Algorithmus</i>	52
2.3. <i>Direkte Faktorisierungsverfahren</i>	55
2.3.1. <i>Symmetrische Matrizen (das Cholesky-Verfahren)</i>	57
2.3.2. <i>Die Jacobischen Tridiagonalmatrizen</i>	58
2.3.3. <i>Tridiagonal-Block-Matrizen</i>	61
2.4. <i>Iterationsverfahren</i>	64
2.4.1. <i>Iteration in Gesamtschritten (Jacobi)</i>	67
2.4.2. <i>Das Iterationsverfahren von Gauß-Seidel (Iteration in Einzelschritten)</i>	69
2.4.3. <i>Das Restkorrekturverfahren</i>	71
2.4.4. <i>Positiv definite Systeme</i>	73
2.4.5. <i>Blockiterationen</i>	75
2.5. <i>Die Beschleunigung von Iterationsverfahren</i>	76
2.5.1. <i>Praktische Anwendungen von Beschleunigungsverfahren</i>	81
2.5.2. <i>Verallgemeinerungen des Beschleunigungsverfahrens</i>	83
2.6. <i>Matrizeninversion durch Iterationen höherer Ordnung</i>	85
3. ITERATIONSVERFAHREN ZUR LÖSUNG NICHTLINEARER GLEICHUNGEN	89
3.0. <i>Einführung</i>	89
3.1. <i>Das Verfahren der schrittweisen Näherung für eine Gleichung</i>	90
3.1.1. <i>Fehlerfortpflanzung</i>	95
3.1.2. <i>Iterationsverfahren zweiter und höherer Ordnung</i>	98

3.2. <i>Einige spezielle Iterationsverfahren</i>	100
3.2.1. Die einfache Iteration oder das Sehnens-Verfahren (Verfahren erster Ordnung)	101
3.2.2. Das Newtonsche Näherungsverfahren (Verfahren zweiter Ordnung)	102
3.2.3. Die regula falsi (Verfahren von gebrochener Ordnung)	104
3.2.4. Das δ^2 -Verfahren von Aitken (Verfahren beliebiger Ordnung)	107
3.3. <i>Iterationsverfahren für Gleichungssysteme</i>	114
3.3.1. Einige spezielle Iterationsschemata für Gleichungssysteme	118
3.3.2. Die Konvergenz des Newtonschen Näherungsverfahrens	121
3.3.3. Ein spezielles Beschleunigungsverfahren für nichtlineare Systeme	126
3.4. <i>Spezielle Verfahren für Polynome</i>	129
3.4.1. Berechnung der Polynome und ihrer Ableitung (Horner-Schema)	130
3.4.2. Sturmsche Ketten	132
3.4.3. Das Bernoullische Verfahren	135
3.4.4. Das Verfahren von Bairstow	137
4. <i>BERECHNUNG VON EIGENWERTEN UND EIGENVEKTOREN</i>	141
4.0. <i>Einführung</i>	141
4.1. <i>Korrekte Formulierung der Eigenwertprobleme. Fehlerabschätzungen</i>	142
4.1.1. Fehlerabschätzungen a posteriori	147
4.2. <i>Das Potenzverfahren</i>	154
4.2.1. Beschleunigung des Potenzverfahrens	158
4.2.2. Intermediäre Eigenwerte und Eigenvektoren (Orthogonalisierung, Ordnungsniedrigung, inverse Iteration)	160
4.3. <i>Verfahren, die auf der Transformation von Matrizen beruhen</i>	167
5. <i>GRUNDLAGEN DER THEORIE DER POLYNOME. APPROXIMATION</i>	185
5.0. <i>Einführung</i>	185
5.1. <i>Der Weierstraßsche Approximationssatz und Bernsteinsche Polynome</i>	192
5.2. <i>Die Interpolationspolynome</i>	196
5.2.1. Der punktweise Fehler in Interpolationspolynomen	199
5.2.2. Die Hermiteische oder oskulierende Interpolation	201
5.3. <i>Approximation nach der Methode der kleinsten Quadrate</i>	203
5.3.1. Konstruktion orthonormierter Funktionensysteme	208
5.3.2. Gewogene Approximationen nach der Methode der kleinsten Quadrate	211
5.3.3. Einige Eigenschaften von Systemen orthogonaler Polynome	213
5.3.4. Punktweise Konvergenz der nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Approximationspolynome	215
5.3.5. Diskrete Approximationen nach der Methode der kleinsten Quadrate	221
5.4. <i>Polynome der „besten“ Approximation</i>	232
5.4.1. Der Fehler bei den Polynomen der besten Näherung	234
5.4.2. Tschebyschewsche Polynome	237
5.5. <i>Trigonometrische Approximation</i>	240
5.5.1. Trigonometrische Interpolation	241
5.5.2. Trigonometrische Approximationen nach der Methode der kleinsten Quadrate, Fourierreihen	249
5.5.3. „Beste“ trigonometrische Approximation	252

6. DIFFERENZEN, INTERPOLATIONSPOLYNOME UND NÄHERUNGSDIFFERENTIATION.....	257
6.0. Einführung	257
6.1. Das Newtonsche Interpolationspolynom und Differenzenquotienten	257
6.2. Iterative lineare Interpolation	270
6.3. Vorwärts genommene Differenzen und äquidistante Interpolationspunkte	272
6.3.1. Interpolationspolynome und Restglieder für äquidistante Punkte	276
6.3.2. Zentrale Interpolationsformeln	281
6.3.3. Bemerkungen zur Interpolationspraxis	285
6.3.4. Divergenz von Interpolationspolynomfolgen	287
6.4. Der Kalkül der Differenzenoperatoren	293
6.5. Numerische Differentiation	300
6.5.1. Differentiation unter Benutzung allgemeiner Stützstellen	301
6.5.2. Differentiation unter Benutzung äquidistanter Stützstellen.....	305
6.6. Interpolation bei mehreren Variablen	307
7. NUMERISCHE INTEGRATION.....	313
7.0. Einführung	313
7.1. Interpolatorische Quadraturen	316
7.1.1. Die Newton-Coteschen Quadraturformeln	322
7.1.2. Bestimmung der Koeffizienten.....	328
7.2. Rundungsfehler und Formeln mit gleichen Koeffizienten	333
7.2.1. Quadraturformeln mit gleichen Koeffizienten	336
7.3. Die Quadraturformeln von Gauß; der maximale Genauigkeitsgrad.....	340
7.4. Quadraturformeln mit Gewichtsfunktion	345
7.4.1. Gauß-Tschebyschewsche Quadraturformeln	348
7.5. Zusammengesetzte Quadraturformeln	350
7.5.1. Periodische Funktionen und die Trapezregel	353
7.5.2. Konvergenz für stetige Funktionen	355
7.6. Singuläre Integrale; unstetige Integranden.....	359
7.6.1. Sprungstellen mit endlicher Sprunghöhe als Unstetigkeitsstellen	360
7.6.2. Integranden mit Unendlichkeitsstellen	360
7.6.3. Unendliche Integrationsgrenzen	364
7.7. Mehrfache Integrale	366
7.7.1. Anwendung von Interpolationspolynomen	368
7.7.2. Unbestimmte Koeffizienten (und Knoten).....	370
7.7.3. Trennung der Variablen	373
7.7.4. Zusammengesetzte Formeln für mehrfache Integrale	375
8. NUMERISCHE LÖSUNG VON GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	378
8.0. Einführung	378
8.1. Methoden, die auf der Approximation der Ableitung beruhen: das Euler-Cauchysche Polygonzugverfahren	381
8.1.1. Verbesserung der Genauigkeit der numerischen Lösung	386

8.1.2. Rundungsfehler	388
8.1.3. Zentrale Differenzenverfahren	391
8.1.4. Ein divergentes Verfahren mit einem Abbruchfehler höherer Ordnung	394
8.2. <i>Mehrschrittverfahren, die auf Quadraturformeln beruhen</i>	398
8.2.1. Fehlerabschätzungen für die Vorgabe-Korrektur-Verfahren	403
8.2.2. Änderung der Maschenweite	407
8.3. <i>Ein-Schritt-Verfahren</i>	409
8.3.1. Finite Taylorentwicklungen	412
8.3.2. Ein-Schritt-Verfahren, die auf Quadraturformeln beruhen	415
8.4. <i>Lineare Differenzgleichungen</i>	420
8.5. <i>Verträglichkeit, Konvergenz und Stabilität von Differenzenverfahren</i>	425
8.6. <i>Differentialgleichungen höherer Ordnung und Differentialgleichungssysteme</i>	433
8.7. <i>Randwert- und Eigenwertprobleme</i>	437
8.7.1. Anfangswertverfahren	440
8.7.2. Finite Differenzenverfahren	444
8.7.3. Eigenwertprobleme	451
9. DIFFERENZENVERFAHREN FÜR PARTIELLE DIFFERENTIAL- GLEICHUNGEN	458
9.0. <i>Einführung</i>	458
9.0.1. Vereinbarungen zur Bezeichnungsweise	460
9.1. <i>Die Laplacesche Differentialgleichung in einem Rechteck</i>	461
9.1.1. Anwendung der Matrixschreibweise	468
9.1.2. Ein Eigenwertproblem für den Laplaceschen Operator	474
9.2. <i>Lösung Laplacescher Differenzgleichungen</i>	479
9.2.1. Linien- oder Blockiterationen	488
9.2.2. Iterationsverfahren mit Richtungsänderung	492
9.3. <i>Die Wellengleichung und ein äquivalentes System</i>	496
9.3.1. Differenzenapproximationen und Abhängigkeitsbereiche	503
9.3.2. Konvergenz von Differenzenlösungen	509
9.3.3. Differenzenverfahren für ein hyperbolisches System erster Ordnung	514
9.4. <i>Die Wärmeleitungsgleichung</i>	519
9.4.1. Implizite Verfahren	524
9.5. <i>Allgemeine Theorie: Konsistenz, Konvergenz und Stabilität</i>	533
9.5.1. Weitere Konsequenzen der Stabilität	541
9.5.2. Der Stabilitätstest von J. von Neumann	542
LITERATUR	550
SACHREGISTER	553

