目　　次

1. 序　　論

1·1 数の表現. 1
1·1·1 n 進法. 1
1·1·2 連分数. 1
1·2 初等整数論. 3
1·2·1 定　義. 3
1·2·2 定　理. 3
1·3 順列，組合わせ及び二項定理，多項定理. 5
1·3·1 順　列. 5
1·3·2 組合わせ. 5
1·3·3 二項定理及び二項係数. . . . 6
1·3·4 多項定理. 6
1·4 部分分数. 7
1·5 不等式. 7
1·5·1 Schwarz, Hölder 及び Minkowski の不等式 7
1·5·2 平均の間の不等式，凸函数. . 7
1·6 三角法. 8
1·6·1 三角函数，de Moivre の公式等. 9
1·6·2 三角形(平面及び球面)に関する公式. 11
1·6·3 双曲線函数. 12
1·7 高次方程式. 14
1·7·1 解の公式. 14
1·7·2 n 次方程式. 14
1·7·3 実係数の n 次方程式. 15
1·7·4 複素係数の n 次方程式に対する Sturm 型の定理等. . .16
1·7·5 数値解法. 17
1·8 集合算，Boole 代数. 19
1·8·1 集　合. 19
1·8·2 Boole の代数. 20
1·8·3 写像，集合の濃度. 21
1·9 位相空間. 22
1·9·1 距離空間，位相空間. 22
1·9·2 写像の連続性. 23
1·9·3 集積点，閉集合，開集合，粗，連結，コンパクト. 23
1·9·4 相対位相. 24
1·9·5 位相積，Tychonoff の定理. 25
1·10 (代数的) 位相幾何学入門. . . .25
1·10·1 一次元複体又は線状複体 . .25
1·10·2 二次元集合体としての曲面の分類. 26
1·10·3 n 次元への拡張 27

2. 一 次 代 数

2·1 行　列. 29
2·1·1 行列の定義，記号. 29
2·1·2 行列の算法. 29
2·1·3 行列の行列式，階数，逆行列，固有和. 31
2·1·4 $n\times n$ 行列の対称性. 32
2·1·5 行列の変換. 33
2·1·6 $n\times n$ 行列の多項式，函数. .35
2·2 行列式. 36
2·2·1 行列式の定義. 36
2·2·2 行列式の主要性質. 37
2·2·3 行列式の値の計算法. 38
2·2·4 特殊行列式. 38
2·2·5 函数行列式. 40
2·3 連立一次方程式. 42
2·3·1 定　義. 42
2·3·2 $m=n$ である場合の可解性の条件. 42
2·3·3 数値解法. 44

2·4 一次変換と二次形式. 44
2·4·1 線形空間又はベクトル空間. .44
2·4·2 一次変換. 47
2·4·3 双対空間又は共軛空間. . . .48
2·4·4 二次形式及びエルミット形式. 49
2·4·5 ウニタリ変換及び直交変換. .51
2·5 非負の行列. 53
2·5·1 定義，記号. 53
2·5·2 Hawkins-Simon の条件. . .53
2·5·3 Frobenius の定理，Frobenius 根 53
2·5·4 Frobenius 根の性質. 54
2·5·5 分解不能な非負の行列の性質. 54
2·5·6 分解不能を仮定しない非負の行列の性質. 54
2·5·7 確率行列. 55
2·6 線形不等式と凸集合. 56
2·6·1 線形不等式. 56
2·6·2 上記の定理の応用. 56
2·6·3 凸集合. 56
2·6·4 凸錐，凸多面錐. 57
2·6·5 線形不等式の一般解. 58

3. 群論及び群の表現論

3·1 群，環，及び体. 59
3·1·1 定 義. 59
3·1·2 対称群. 60
3·1·3 部分群，正規部分群，剰余類. 61
3·1·4 同型，準同型. 61
3·2 群の表現. 61
3·2·1 定 義. 61
3·2·2 表現の可約性，既約性，不変部分空間. 62
3·2·3 有限群の表現論. 64
3·2·4 対称群の表現. 65
3·2·5 回転群の表現. 67
3·2·6 Lorentz 群及びその表現. . .72
3·2·7 結晶族群. 75
3·3 Racah 代数 81
3·3·1 角運動量演算子. 81
3·3·2 角運動量の合成，Wigner 係数 82
3·3·3 3 個および 4 個の角運動量の合成，Racah 係数と X 係数. .83
3·3·4 テンソル代数. 84

4. 解析幾何学，射影幾何学

4·1 平面及び立体解析幾何学. 87
4·1·1 線 分. 87
4·1·2 平 面. 87
4·1·3 立 体. 88
4·2 射影幾何学. 91
4·2·1 射影空間. 91
4·2·2 射影的対応. 92
4·2·3 二次曲面. 93
4·2·4 二次元の射影空間（射影平面）の性質. 94
4·2·5 射影変換群の部分群とこれに伴う幾何学. 95
4·3 計算図表. 96
4·3·1 概 説. 96
4·3·2 共点図表. 96
4·3·3 共線図表. 97
4·3·4 共線図表と共点図表の関係. .99
4·3·5 変数の数が 3 個以上のとき. .99

5. 微分幾何学

5·1 曲線論. 103
5·1·1 方程式. 103
5·1·2 曲線の長さ. 103
5·1·3 接線及び接線ベクトル. . . 103
5·1·4 曲 率. 104
5·1·5 接触平面，主法線，陪法線. 104

5·1·6　Frenet の公式 105
5·1·7　曲線の自然方程式. 105
5·2　曲面論. 106
5·2·1　接平面及び法線の方程式. . 106
5·2·2　第一基本二次微分形式及び基本テンソル. 106
5·2·3　Gaussの全曲率 107
5·2·4　第二基本微分形式及び主テンソル. 108
5·2·5　曲面論の基本定理. 108
5·2·6　曲面の法曲率. 109
5·2·7　主方向及び主曲率. 109
5·3　歯車の理論. 110
5·3·1　平歯車の歯形. 110
5·3·2　空間歯車の基礎方程式. . . 111
5·4　座標系. 112
5·4·1　n次元ユークリッド(点)空間. 112
5·4·2　R_nの座標枠及び直線座標. . 113
5·4·3　直線座標系の間の関係. . . 113
5·4·4　曲線座標系. 113
5·4·5　曲線座標系の自然座標枠と座標変換，ユークリッド空間の基本テンソル. 114
5·4·6　線素及び体積要素. 115
5·4·7　Christoffelの記号 115
5·4·8　ユークリッド空間の方向附けと座標系の正負. 116
5·4·9　三次元空間におけるベクトル積. 116
5·5　特殊な直交座標系. 117
5·5·1　平面の場合. 117
5·5·2　三次元の場合. 118
5·5·3　n次元空間の極座標 $(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \cdots\cdots, \vartheta_{n-1})$. 124
5·5·4　変数分離の例. 125
5·6　ベクトル解析. 128
5·6·1　ベクトル場. 128
5·6·2　スカラー場及びベクトル場における微分作用素. 129
5·6·3　曲線座標系における表示. . 130
5·6·4　特殊なベクトル場. 130
5·6·5　線積分. 130
5·6·6　線積分に関する基本定理とベクトル場. 131
5·6·7　平面上での Gauss, Stokes 及び Green の定理 132
5·6·8　曲面及び曲面上の座標系. . 133
5·6·9　面積分. 134
5·6·10　Gauss, Stokes 及び Green の定理 135
5·7　テンソル解析. 136
5·7·1　一点Pにおけるテンソルの定義. 136
5·7·2　テンソルに関する演算. . . 137
5·7·3　テンソルであるための判定条件. 138
5·7·4　対称テンソル及び交代テンソル. 138
5·7·5　ベクトルの外積. 138
5·7·6　一点Pにおける密度テンソルと密度スカラー. 139
5·7·7　交代テンソルの対偶テンソル. 140
5·7·8　テンソル場. 140
5·7·9　テンソル場の共変微分. . . 141
5·7·10　平行ベクトル場 143
5·8　リーマン幾何学. 143
5·8·1　多様体及び多様体におけるベクトル，テンソル. 143
5·8·2　リーマン空間. 143
5·8·3　基本テンソル，ベクトルの長さ及び二つのベクトルの間の角. 144
5·8·4　リーマン空間の曲線，測地線（I）. 144

5·8·5 平行ベクトル場，測地線(II). 145
5·8·6 ベクトルの平行移動. . . . 145
5·8·7 リーマン空間の曲線のユークリッド空間への展開. . . . 145
5·8·8 曲率テンソル. 146
5·8·9 曲率テンソルの性質，Ricci のテンソル，曲率スカラー. . 147
5·8·10 Bianchi の恒等式 148
5·8·11 測地座標系 148

6. 解析概論

6·1 微分積分. 149
6·1·1 函数の連続性. 149
6·1·2 有界変動の函数. 150
6·1·3 微分（一変数）. 150
6·1·4 偏微分. 152
6·1·5 積 分. 155
6·1·6 多重積分. 162
6·1·7 Stieltjes 積分 164
6·2 数値積分法. 164
6·2·1 補間法の応用. 164
6·2·2 平均値法. 165
6·2·3 広範囲の積分. 167
6·3 Lebesgue積分 167
6·3·1 n 次元ユークリッド空間における Lebesgue 積分 . . . 167
6·3·2 抽象的 Lebesgue 積分 . . 170
6·4 函数論. 171
6·4·1 複素変数の函数. 171
6·4·2 正則函数. 172
6·4·3 積分定理. 174
6·4·4 整函数. 176
6·4·5 孤立特異点，Laurent 展開. 177
6·4·6 有理型函数. 178
6·4·7 一次函数. 179
6·4·8 解析接続. 179
6·4·9 等角写像. 181
6·4·10 鞍部点法. 182
6·4·11 多変数の正則函数. 182
6·5 級 数. 185
6·5·1 数 列. 185
6·5·2 無限級数. 187
6·5·3 二重数列. 192
6·5·4 二重級数. 192
6·5·5 変数項の級数. 194
6·5·6 羃級数. 195
6·5·7 無限乗積. 196
6·5·8 雑級数. 198
6·5·9 漸近級数. 199
6·5·10 収斂しない級数の総和法. . 204
6·6 多変数函数. 207
6·6·1 多複素変数の函数. 207
6·6·2 多変数の正則函数. 207
6·6·3 羃級数. 209
6·6·4 特異点. 210
6·6·5 正則領域. 210

7. 常微分方程式

7·1 一般的性質. 213
7·1·1 存在定理. 213
7·1·2 解の種類. 213
7·2 一階微分方程式. 213
7·2·1 初等解法. 213
7·3 高階微分方程式. 216
7·4 線形微分方程式. 217
7·4·1 一般的性質. 217
7·4·2 $L(y)=F(x)$ の特解を見出す法. 218
7·4·3 定数係数の場合. 218
7·5 連立常微分方程式. 220
7·5·1 一般の場合. 220
7·5·2 線形方程式. 220
7·6 定積分による解法. 221
7·6·1 Laplace 変換. 221
7·6·2 Euler 変換. 221
7·7 級数解法. 221

7·7·1　一般的方法. 221
7·7·2　Fuchs 形の微分方程式 . . 222
7·7·3　Riemann の P-函数. . . . 223
7·7·4　超幾何函数，超幾何級数. . 223
7·7·5　拡張した超幾何級数. . . . 228
7·8　積分曲線の性質. 229
7·8·1　一階常微分方程式の積分曲線. 229
7·8·2　振動定理. 230
7·9　二階常微分方程式の境界値問題，固有値問題. 231
7·9·1　Green 函数 231
7·9·2　随伴微分系. 231
7·9·3　Sturm-Liouville 型境界値問題. 232
7·9·4　特異固有値問題. 233
7·9·5　W. K. B 法. 234
7·10　常微分方程式の数値解法 . . . 235
7·10·1　逐次近似法 235
7·10·2　狭い範囲に用いる方法 . . 236
7·10·3　進行積分法 237
7·11　全微分方程式 239
7·11·1　3 変数の全微分方程式 . . 239
7·11·2　n 変数連立全微分方程式. . 240
7·11·3　一階線型連立偏微分方程式との関係 241
7·12　常微分方程式の解の安定性 . . 242
7·12·1　定　義 242
7·12·2　連立微分方程式 244
7·12·3　軌道安定 245
7·12·4　Liapunov の第二の方法. . 246
7·12·5　漸近安定の範囲 247
7·13　Navier-Stokes 方程式 249
7·13·1　定常流 249
7·13·2　非定常解 249

8.　偏微分方程式

8·1　一階偏微分方程式. 251
8·1·1　特殊な形をもつ場合（完全解）. 251
8·1·2　Lagrange の方法. 251
8·1·3　Charpit の方法. 252
8·1·4　Jacobi の方法 252
8·1·5　Jacobi 及び Mayer の方法. 253
8·1·6　連立偏微分方程式. 254
8·1·7　線形連立方程式. 254
8·1·8　E. Cartan の微分形式. . . 255
8·2　二階偏微分方程式. 256
8·2·1　完全解から一般解を導く方法. 256
8·2·2　中間積分. 257
8·2·3　中間積分のある場合（Monge の方法）. 257
8·2·4　中間積分のない場合（Darboux の方法）. 258
8·2·5　Laplace の方法. 258
8·2·6　Ampère の方法 259
8·2·7　その他の方法. 260
8·3　切触変換. 260
8·3·1　定　義. 260
8·3·2　Legendre 変換，正準変換. 261
8·3·3　切触変換の一般の形. . . . 262
8·4　一階偏微分方程式の初期値問題. 263
8·4·1　準線型方程式. 263
8·4·2　一般の場合. 265
8·5　二階偏微分方程式の分類. . . . 266
8·5·1　二階線型方程式. 266
8·5·2　二階準線型方程式. 268
8·5·3　高階方程式および連立方程式. 268
8·6　楕円型偏微分方程式. 268
8·6·1　Laplace および Poisson の方程式. 268
8·6·2　Helmholtz の方程式 . . . 271
8·6·3　一般の二階線型方程式. . . 272

8·6·4 固有値問題. 273
8·7 双曲型偏微分方程式. 275
8·7·1 波動方程式. 275
8·7·2 一般の電信方程式. 277
8·7·3 2 変数の方程式. 278
8·7·4 時間的に一様な一般の方程式. 279
8·8 放物型方程式. 280
8·8·1 熱伝導の方程式. 280
8·8·2 一般の放物型方程式. . . . 281
8·8·3 Schrödinger 方程式. . . . 281
8·9 変数分離の方法. 282
8·9·1 双曲型及び放物型. 282
8·9·2 楕円型. 282

9. 変分法

9·0·1 有限箇の変数の函数の極値問題. 287
9·0·2 変分法の問題. 287
9·0·3 Euler の（微分）方程式. . . 288
9·0·4 詳細な条件. 288
9·0·5 Euler 方程式の積分. 289
9·0·6 境界条件. 289
9·0·7 その他の汎函数. 290
9·0·8 条件付変分法. 291
9·0·9 解析力学への応用. 291
9·0·10 変分法の直接解法. 292
9·0·11 線型の問題. 292

10. 積分方程式

10·0·1 定義及び分類 295
10·0·2 解法（連続解）. 295
10·0·3 対称核の場合 298
10·0·4 その他の場合 299
10·0·5 特異積分方程式 300
10·0·6 多変数への拡張 301
10·0·7 積分方程式の応用 301
10·0·8 数値解法 302

11. 函数解析

11·1 Fourier 級数 305
11·1·1 定 義 305
11·1·2 Fourier 級数に対する主要事項. 305
11·1·3 Fourier 級数の例 306
11·1·4 多変数函数の Fourier 級数. 309
11·1·5 Poisson の総和公式 . . . 309
11·1·6 調和分析 310
11·2 Fourier 変換 313
11·2·1 定 義 313
11·2·2 Fourier 変換の性質 . . . 314
11·2·3 拡張 1. 315
11·2·4 拡張 2. Plancherel の定理. 315
11·2·5 Fourier 変換の表 316
11·2·6 多変数函数の Fourier 変換. 321
11·2·7 Hankel 変換 321
11·2·8 Hilbert 変換 321
11·2·9 Mellin 変換. 322
11·3 調和解析 323
11·3·1 問 題 323
11·3·2 正の定符号函数 324
11·3·3 拡 張 325
11·3·4 $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}dv(\lambda)$ の調和解析. 325
11·3·5 概週期函数 325
11·3·6 概週期函数 $f(t)$ の調和解析. 326
11·4 Laplace 変換及び Heaviside の記号解析. 327
11·4·1 定義及び収斂域 327
11·4·2 反転公式 327
11·4·3 Heaviside の記号解析 . . 327
11·4·4 Heaviside の記号解析の

使用法. 333
11·5 ヒルベルト空間論 336
11·5·1 作用素の定義 336
11·5·2 作用素の対称性 337
11·5·3 スペクトル分解 338
11·5·4 スペクトル分解の固有値問題への応用. 338
11·5·5 スペクトル分解の展開定理への応用. 339
11·5·6 Stone の定理 341
11·5·7 ウニタリ作用素のスペクトル分解. 341
11·5·8 摂動論 341
11·6 超函数 342
11·6·1 定　義 342
11·6·2 Dirac の δ 函数及び Heaviside の Y 函数の意味付け. 343
11·6·3 超函数の表現 344
11·6·4 超函数の概念の n 次元ユークリッド空間 R^n への拡張 . . 344
11·6·5 超函数の算法 345
11·6·6 超函数の微分方程式 . . . 345
11·6·7 超函数による Fourier 級数論. 346
11·6·8 超函数による Fourier 積分. 347
11·7 Mikusiński の演算子法. . . . 350
11·7·1 Titchmarsh の定理 . . . 350
11·7·2 Mikusiński のオペレータ. 350
11·7·3 積分オペレータと微分オペレータ. 350
11·7·4 スカラーオペレータ . . . 350
11·7·5 Mikusiński の演算子法. . 351
11·8 バナハ空間 351
11·8·1 定　義 351
11·8·2 部分空間，作用素 352
11·8·3 閉作用素，閉グラフ定理 . 352
11·8·4 Hahn-Banach の拡張定理. 353
11·8·5 双対空間，強収斂と弱収斂. 353
11·8·6 双対または共役作用素 . . 353
11·8·7 スペクトルおよびレゾルベント. 354
11·8·8 コンパクト作用素，Riesz-Schander の理論. . . . 354
11·8·9 有界作用素の半群 355

12. 補間法及び差分法

12·1 補間法 357
12·1·1 階　差 357
12·1·2 補間公式 357
12·1·3 階差を用いない場合 . . . 362
12·1·4 Prony の補間法. 362
12·2 差分法 363
12·2·1 差　分 363
12·2·2 和　分 364
12·2·3 Bernoulli 数及び Bernoulli の函数 366
12·3 差分方程式 367
12·3·1 定　義 367
12·3·2 線型差分方程式 368
12·3·3 定数係数の線型差分方程式. 368
12·3·4 定数係数連立差分方程式 . 369
12·3·5 一般線型差分方程式 . . . 371
12·3·6 偏差分方程式 371

13. 特殊函数

13·1 ガンマ函数 373
13·1·1 定義及び基本性質 373
13·1·2 諸性質 374
13·1·3 漸近展開 375
13·1·4 ベータ函数 375
13·1·5 プシイ函数 377

13·1·6 雑性質 378
13·2 直交函数系 378
13·2·1 定 義 378
13·2·2 直交函数系による Fourier 級数, Bessel 不等式. 379
13·2·3 正規直交函数系の完全性 . 379
13·2·4 直交化 379
13·2·5 直交多項式 380
13·2·6 Gegenbauer 多項式 . . . 395
13·2·7 Tschebyscheff の多項式 $T_n(x)$ の諸性質 396
13·2·8 Hermite 多項式 $H_n(x)$ の諸性質. 397
13·2·9 Jacobi 多項式 $F_n(\alpha, \gamma, x)$ の諸性質. 398
13·2·10 Laguerre 多項式 $L_m^{(\alpha)}(x)$ の諸性質. 398
13·3 Bessel 函数. 399
13·3·1 定義と性質 400
13·3·2 Bessel 函数を含む定積分 . 423
13·3·3 Bessel 函数を含む級数 . . 431
13·3·4 准 Bessel 多項式 437
13·3·5 准 Bessel 函数 444
13·4 Whittaker 函数 453
13·4·1 定 義 453
13·4·2 諸性質 455
13·4·3 Weber の函数. 458
13·5 Mathieu 函数. 461
13·5·1 定 義 461
13·5·2 簡単な性質 466
13·5·3 Mathieu 函数の変形. . . 467
13·5·4 第二の解 468
13·5·5 Bessel 函数による表現. . 469
13·6 Lamé の函数 471
13·6·1 定 義 471
13·6·2 楕円体面調和函数 473
13·7 楕円函数と楕円積分 475
13·7·1 定義と基本定理 475
13·7·2 Weierstrass の函数 . . . 477
13·7·3 ϑ 函数 482
13·7·4 Jacobi の楕円函数. . . . 485
13·7·5 種々なパラメータ間の関係, 諸函数間の関係. 490
13·7·6 楕円積分 493
13·8 エムデン函数 500
13·8·1 定 義 500
13·8·2 性 質 500
13·8·3 解曲線 500

14. 確率及び統計

14·1 確率論 501
14·1·1 測度論的確率論 501
14·1·2 確率変数 502
14·1·3 一次元分布 505
14·1·4 n 次元分布 508
14·1·5 大数の法則 509
14·1·6 確率過程 510
14·2 統 計 514
14·2·1 記述統計 514
14·2·2 推測統計とは何か 516
14·2·3 分布論 516
14·2·4 推定論 518
14·2·5 検定論 522
14·3 最小自乗法 525
14·3·1 偶然誤差 525
14·3·2 直接観測の処理 526
14·3·3 間接観測の処理 526
14·3·4 条件附き間接測定 527
D 表

15. 最 適 問 題

15·1 線形計画法, 非線形計画法 . . 537
15·1·1 線形計画法 537
15·1·2 単体法 538
15·1·3 単体法による計算法 . . . 540

15·1·4　改訂単体法 543
15·1·5　双対性 544
15·1·6　網目状の流れ 546
15·1·7　割り当て問題 547
15·1·8　輸送問題 548
15·1·9　非線形計画法 552
15·2　矩形ゲーム 555
15·2·1　矩形ゲーム 555
15·2·2　サドル 556
15·2·3　平均得点 556
15·2·4　最適戦法 557
15·2·5　矩形ゲームの基本定理 . . 557
15·2·6　最適戦法の性質 558
15·2·7　全部の最適戦法を求める方法. 559
15·2·8　対称ゲーム 560
15·2·9　矩形ゲームと線形計画法 . 560
15·2·10　一般のゲーム 561
15·2·11　矩形ゲームへの標準化 . . 562
15·3　ダイナミックプログラミング . 563
15·4　Pontrjagin の最大原理 . . . 567
15·4·1　定　義 567
15·4·2　最大原理 568
15·4·3　時間最適問題における最大原理. 569
15·4·4　動端点の場合 570
15·4·5　線形系の時間最適問題 . . 571
15·4·6　シンセシス問題 572
15·4·7　一般の場合 573
15·4·8　函数近似問題への応用 . . 573
数学記号集 575
I　論理計算記号
II　一般記号
【附】函数記号表

索　引 589