

目 次

I. 代数学・整数論

[菅野 恒雄]

| | | | |
|--------------|----|---------------|----|
| 1. 集合と写像 | 1 | 5. 固有値 | 40 |
| 1.1. 集合 | 1 | 5.1. 固有値 | 40 |
| 1.2. 同値関係 | 1 | 5.2. 相似関係 | 42 |
| 1.3. 写像 | 2 | 5.3. 二次形式 | 45 |
| 2. 行列 | 3 | 6. 群 | 48 |
| 2.1. 行列 | 3 | 6.1. 半群と群 | 48 |
| 2.2. 正方行列 | 7 | 6.2. 部分群と剰余群 | 50 |
| 2.3. 行列の基本変形 | 8 | 7. 環 | 53 |
| 2.4. 一次方程式 | 13 | 7.1. 環 | 53 |
| 3. 行列式 | 16 | 7.2. 可換環と整域 | 55 |
| 3.1. 置換 | 16 | 7.3. 整数環と多項式環 | 57 |
| 3.2. 行列式 | 20 | 8. 体 | 59 |
| 3.3. 小行列式 | 22 | 8.1. 体 | 59 |
| 4. 線形空間 | 25 | 8.2. 拡大体 | 61 |
| 4.1. 線形空間 | 25 | 8.3. 有限体 | 63 |
| 4.2. 基底 | 28 | 9. 整数論 | 64 |
| 4.3. 線形写像 | 32 | 9.1. 合同関係 | 64 |
| 4.4. 計量線形空間 | 35 | 9.2. 二次剰余 | 66 |

II. 幾 何 学

[石原 繁]

A. 解析幾何学

| | | | |
|-----------------|----|---------------|----|
| 1. 平面解析幾何学 | 70 | 2. 立体解析幾何学 | 77 |
| 1.1. 直線 | 70 | 2.1. 直線・平面 | 77 |
| 1.2. 円 | 72 | 2.2. 球面 | 79 |
| 1.3. 楕円・双曲線・放物線 | 73 | 2.3. 二次曲面の標準形 | 80 |
| 1.4. 二次曲線とその分類 | 75 | 2.4. 二次曲面の分類 | 82 |

| | | | |
|------------|----|-------------------------------|----|
| 3. 射影幾何学 | 83 | 3.3. デザルグ・パスカル・ブリ アンションの定理 | 84 |
| 3.1. 斉次座標 | 83 | | |
| 3.2. 双対の原理 | 84 | | |

B. 微分幾何学

| | | | |
|------------------|----|-------------------------|-----|
| 1. 空間曲線 | 86 | 2.3. 曲面の曲率 | 93 |
| 1.1. 接線ベクトル・弧長 | 86 | 2.4. 曲面の誘導方程式・構造 方程式 | 95 |
| 1.2. 主法線ベクトル・曲率 | 86 | 2.5. 測地線 | 97 |
| 1.3. 従法線ベクトル・振れ率 | 87 | 2.6. ガウス・ボンネの定理 | 98 |
| 1.4. フルネーの公式 | 88 | 3. 線織面 | 99 |
| 2. 曲面 | 89 | 3.1. 線織面 | 99 |
| 2.1. 曲面の媒介変数表示 | 89 | 3.2. 可展面 | 100 |
| 2.2. 第二基本量 | 91 | | |

C. リーマン幾何学

| | | | |
|------------------|-----|---------------|-----|
| 1. ベクトル・テンソル | 100 | 2.4. 勾配・回転・発散 | 107 |
| 1.1. 接ベクトル | 100 | 2.5. 曲率テンソル | 108 |
| 1.2. テンソル | 102 | 2.6. 断面曲率 | 110 |
| 2. リーマン空間 | 103 | 2.7. 平行移動 | 111 |
| 2.1. リーマン計量 | 103 | 2.8. 測地線 | 112 |
| 2.2. 共変微分 | 105 | 2.9. 共形変換 | 113 |
| 2.3. クリストッフエルの記号 | 106 | 2.10. 射影変換 | 115 |

III. 微 分 学 [猪 狩 糧]

| | | | |
|----------------|-----|---------------|-----|
| 1. 実数 | 117 | 3. 関数 | 131 |
| 1.1. 実数の定義 | 117 | 3.1. 関数の極限 | 131 |
| 1.2. 点集合 | 118 | 3.2. 連続関数 | 132 |
| 2. 数列と級数 | 119 | 3.3. 初等関数 | 134 |
| 2.1. 数列の収束 | 119 | 4. 微分 | 137 |
| 2.2. 数列の極限值 | 121 | 4.1. 微分係数と導関数 | 137 |
| 2.3. 級数の収束条件 | 123 | 4.2. 平均値定理 | 140 |
| 2.4. 絶対収束と条件収束 | 125 | 5. 関数列 | 143 |
| 2.5. 級数の積 | 127 | 5.1. 関数列の収束 | 143 |
| 2.6. 無限乗積 | 128 | 5.2. 関数列の微分 | 146 |
| 2.7. 二重数列と二重級数 | 129 | 5.3. 巾級数 | 147 |

| | |
|----------------------------|---------------------|
| 6. 多変数の関数…………… 149 | 6.4. 写像の微分…………… 156 |
| 6.1. n 次元空間の点集合…………… 149 | 6.5. 逆関数定理…………… 158 |
| 6.2. 関数の微分…………… 151 | 6.6. 陰関数定理…………… 160 |
| 6.3. 極大と極小…………… 155 | |

IV. 積 分 学 [渡利 千波]

| | |
|---------------------------|------------------------------------|
| 1. 定積分(その1)…………… 161 | 5.1. 重積分の定義…………… 185 |
| 1.1. 定積分の定義…………… 161 | 5.2. 累次積分…………… 186 |
| 1.2. 積分可能性…………… 162 | 5.3. 広義積分…………… 189 |
| 1.3. 定積分と微分法…………… 164 | 5.4. 積分変数の変換…………… 191 |
| 2. 原始関数…………… 165 | 5.5. 定積分で定義された函数 の微積分法…………… 193 |
| 2.1. 原始関数…………… 165 | 6. 積分法の応用…………… 196 |
| 2.2. 積分法…………… 165 | 6.1. 曲線の長さ…………… 196 |
| 2.3. 有理函数の積分法…………… 166 | 6.2. 平面積…………… 199 |
| 2.4. 無理函数の積分法…………… 167 | 6.3. 体積…………… 200 |
| 2.5. 超越函数の積分法…………… 169 | 6.4. 曲面積…………… 200 |
| 2.6. 公式表…………… 171 | 6.5. 線積分・面積分…………… 201 |
| 3. 定積分(その2)…………… 171 | 7. ルベッグ積分…………… 202 |
| 3.1. 定積分の計算法…………… 171 | 7.1. 直線上の点集合…………… 202 |
| 3.2. 広義積分…………… 172 | 7.2. 外測度…………… 203 |
| 3.3. 函数項級数の項別積分…………… 176 | 7.3. 可測集合…………… 203 |
| 4. スチルチェス積分…………… 178 | 7.4. ルベッグ積分…………… 205 |
| 4.1. 有界変分函数…………… 178 | 7.5. ルベッグ積分の性質…………… 207 |
| 4.2. スチルチェス積分…………… 180 | 7.6. 函数族 L^p …………… 213 |
| 4.3. スチルチェス積分の性質…………… 181 | |
| 5. 重積分…………… 185 | |

V. 函 数 論 [松本 幾久二]

| | |
|--------------------|---------------------------|
| 1. 複素函数…………… 215 | 1.6. 複素積分…………… 220 |
| 1.1. 複素平面…………… 215 | 2. 正則函数…………… 222 |
| 1.2. 点集合…………… 216 | 2.1. コーシーの積分定理…………… 222 |
| 1.3. 複素函数…………… 217 | 2.2. 正則函数の積分表示…………… 224 |
| 1.4. 函数列…………… 218 | 2.3. ベキ級数とテイラー展開…………… 225 |
| 1.5. 複素微分…………… 219 | 2.4. 正則函数の諸性質…………… 227 |

| | | | |
|---------------|-----|----------------|-----|
| 2.5. 初等函数 | 230 | 4.1. 正則函数による写像 | 242 |
| 2.6. 2変数の正則函数 | 233 | 4.2. 一次変換 | 244 |
| 3. 有理型函数 | 235 | 4.3. 等角写像の基本定理 | 246 |
| 3.1. ローラン展開 | 235 | 5. 調和函数 | 248 |
| 3.2. 孤立特異点 | 236 | 5.1. 調和函数 | 248 |
| 3.3. 有理型函数の定義 | 238 | 5.2. ポアソン積分 | 249 |
| 3.4. 留数 | 239 | 5.3. ハルナックの定理 | 252 |
| 3.5. ルーシェの定理 | 241 | 5.4. ディリクレ問題 | 252 |
| 4. 等角写像 | 242 | | |

VI. 位 相 数 学 [竹之内 脩]

A. 位 相 空 間

| | | | |
|----------------------------|-----|----------------------------|-----|
| 1. 位相的構造 | 269 | 2.6. 局所的性質 | 269 |
| 1.1. 開集合・閉集合・近傍系・ 開核・閉包 | 255 | 3. 一様位相空間 | 270 |
| 1.2. 収束 | 257 | 3.1. 距離空間 | 270 |
| 1.3. 写像 | 258 | 3.2. 一様空間; 定義とその 位相的性質 | 270 |
| 1.4. 部分空間 | 261 | 3.3. 一様連続写像 | 271 |
| 1.5. 直積空間 | 261 | 3.4. 完備性・完備化 | 271 |
| 1.6. 商空間 | 262 | 3.5. 位相群 | 271 |
| 2. 位相的性質 | 263 | 4. 写像のつくる空間 | 271 |
| 2.1. 分離公理 | 263 | 4.1. 種々の位相 | 271 |
| 2.2. 可算公理 | 265 | 4.2. 同程度連続性 | 272 |
| 2.3. 被覆 | 265 | 4.3. ワイエルシュトラス・ ストウンの定理 | 272 |
| 2.4. コンパクト性 | 266 | | |
| 2.5. 連結性 | 268 | | |

B. 位 相 幾 何

| | | | |
|---------------|-----|--------------|-----|
| 1. ホモロジー理論 | 273 | 2.2. ホモトピー群 | 280 |
| 1.1. 代数的理論 | 273 | 3. ファイバー空間 | 281 |
| 1.2. 幾何学的理論 | 275 | 3.1. ファイバー空間 | 281 |
| 1.3. コホモロジー環 | 277 | 3.2. ファイバー束 | 281 |
| 2. ホモトピー理論 | 278 | 3.3. ベクトル束 | 282 |
| 2.1. 被覆空間と基本群 | 278 | 4. 不動点定理 | 282 |

| | |
|--------|-----|
| 5. 次元論 | 282 |
|--------|-----|

C. 函数解析

| | | | |
|-----------------------|-----|---------------------------|-----|
| 1. バナッハ空間 | 283 | 2.3. 直交分解 | 292 |
| 1.1. 定義と種々の例 | 283 | 2.4. 線形汎函数 | 292 |
| 1.2. 線形作用素・線形汎函数 | 285 | 2.5. 有界線形作用素のいろいろ なタイプ | 292 |
| 1.3. ハーン・バナッハの定理 | 287 | 3. スペクトル論 | 294 |
| 1.4. 強収束・弱収束 | 288 | 3.1. スペクトル | 294 |
| 1.5. 開写像定理 | 288 | 3.2. エルミット作用素の スペクトル分解 | 295 |
| 1.6. 閉グラフ定理 | 288 | 3.3. ユニタリ作用素の スペクトル分解 | 297 |
| 1.7. 一様有界性原理 | 289 | 4. 局所凸空間 | 298 |
| 2. ヒルベルト空間 | 289 | 4.1. 定義と例 | 298 |
| 2.1. 定義と種々の例 | 289 | | |
| 2.2. 正規直交系・フーリエ 展開 | 290 | | |

VII. 常微分方程式 [大久保 謙二郎]

A. 線形微分方程式

| | | | |
|--------------------------|-----|--------------------------|-----|
| 1. 一階線形微分方程式 | 299 | 3.2. 非斉次方程式の解法・ その他 | 311 |
| 1.1. 一階常微分方程式 | 299 | 3.3. 連立方程式系 | 312 |
| 1.2. 一階線形常微分方程式 | 300 | 3.4. 線形方程式の解の評価 | 315 |
| 1.3. 定数変化法 | 300 | 4. ある種の二階線形微分方程式 | 317 |
| 2. 定係数線形微分方程式 | 301 | 4.1. 確定特異点 | 317 |
| 2.1. 二階の場合 | 301 | 4.2. 超幾何方程式 | 321 |
| 2.2. 非斉次方程式と特殊解の 求め方 | 303 | 4.3. 不確定特異点 | 323 |
| 2.3. n 階定係数線形微分 方程式 | 304 | 4.4. 合流形超幾何方程式 | 324 |
| 2.4. 一階連立方程式 | 306 | 5. 境界値問題(スツルム・ リウビル型) | 325 |
| 3. 高階線形方程式の一般論 | 310 | 5.1. ラグランジュの等式 | 325 |
| 3.1. 独立な解・基本解系 | 310 | 5.2. グリーン関数 | 327 |

B. 一般の常微分方程式

| | | | |
|-------------|-----|---------------|-----|
| 1. 求積法と解の存在 | 328 | 1.2. 解の幾何学的意味 | 334 |
| 1.1. 求積法 | 328 | 1.3. 逐次近似法 | 336 |

| | | | |
|-------------|-----|-----------|-----|
| 1.4. 解の存在定理 | 338 | 2.2. 相平面 | 343 |
| 2. 非線形問題 | 340 | 2.3. 軌道の形 | 344 |
| 2.1. 安定性 | 340 | 2.4. 周期解 | 345 |

C. 差 分 法

| | | | |
|---------------|-----|---------------|-----|
| 1. 定係数線形差分方程式 | 346 | 1.2. 特別な差分方程式 | 348 |
| 1.1. 差分と和分 | 346 | 1.3. 差分微分方程式 | 349 |

VIII. 積分方程式・変分法 [小沢 満]

A. 積 分 方 程 式

| | | | |
|-----------------|-----|--------------------------|-----|
| 1. ボルテラ型積分方程式 | 350 | 3.1. 固有値と固有関数 | 364 |
| 1.1. 逐次近似法 | 350 | 3.2. ヒルベルト・シュミットの の定理 | 365 |
| 1.2. 解 | 351 | 3.3. マーサーの展開定理 | 370 |
| 2. フレドホルム型積分方程式 | 355 | 4. 特異核と非線形積分方程式 | 371 |
| 2.1. 逐次近似法 | 356 | 4.1. 特異核 | 371 |
| 2.2. フレドホルムの理論 | 357 | 4.2. 非線形方程式 | 372 |
| 3. 対称核 | 364 | | |

B. 変 分 法

| | | | |
|----------------|-----|--------------|-----|
| 1. 第一変分 | 376 | 3. E 関数 | 383 |
| 1.1. 固定端点 | 376 | 4. 条件つき変分問題 | 384 |
| 1.2. 可動端点 | 379 | 4.1. 等周問題 | 385 |
| 1.3. 境界条件と横断条件 | 380 | 5. 直接的方法 | 385 |
| 2. 第二変分 | 381 | 5.1. 特殊等周問題 | 386 |
| 2.1. ルジャンドルの条件 | 381 | 5.2. リッツの方法 | 387 |
| 2.2. 共役点 | 382 | 5.3. ディリクレ問題 | 387 |

IX. 特殊級数・積分変換 [小松 勇作]

A. 特 殊 級 数

| | | | |
|-------------|-----|------------|-----|
| 1. フーリエ級数 | 389 | 1.3. 完全性 | 394 |
| 1.1. フーリエ係数 | 389 | 1.4. 三角級数 | 395 |
| 1.2. 収束条件 | 391 | 2. ディリクレ級数 | 397 |

| 目 | 次 | xi | |
|------------------|-----|------------------|-----|
| 2.1. 収束座標 | 397 | 3.1. ランベルト級数 | 402 |
| 2.2. 諸性質 | 399 | 3.2. 階乗級数・二項係数級数 | 404 |
| 2.3. リーマンのツェータ函数 | 399 | 3.3. 超幾何級数 | 406 |
| 3. 特殊級数の諸例 | 402 | | |

B. 積分変換

| | | | |
|----------------|-----|------------------|-----|
| 1. フーリエ変換 | 408 | 2.3. 計算規則 | 417 |
| 1.1. フーリエの積分定理 | 408 | 3. 積分変換の諸例 | 419 |
| 1.2. フーリエ変換 | 410 | 3.1. スティルチェス変換 | 419 |
| 1.3. 応用例 | 412 | 3.2. メリン変換 | 422 |
| 2. ラプラス変換 | 413 | 3.3. ヒルベルト変換 | 423 |
| 2.1. ラプラス積分 | 413 | 3.4. ハンケル変換 | 424 |
| 2.2. ラプラス変換 | 416 | 3.5. ワイエルシュトラス変換 | 425 |

X. 特殊函数 [西宮 範]

| | | | |
|--------------------------|-----|----------------------------|-----|
| 1. ガンマ函数 | 428 | 3.4. 球面調和函数 | 448 |
| 1.1. ベルヌイの数とオイレル の数 | 428 | 4. ベッセル函数 | 449 |
| 1.2. ガンマ函数の定義と表示 | 429 | 4.1. ベッセルの微分方程式と ベッセル函数 | 449 |
| 1.3. 基本性質 | 430 | 4.2. 積分表示 | 450 |
| 1.4. 漸近展開 | 431 | 4.3. ノイマン函数・ハンケル 函数 | 452 |
| 1.5. ベータ函数 | 432 | 4.4. 円柱函数 | 454 |
| 1.6. ポリガンマ函数・指数 積分等 | 433 | 4.5. 変形ベッセル函数 | 455 |
| 2. 直交函数系 | 434 | 5. 楕円函数 | 457 |
| 2.1. 正規直交化; 定義と性質 | 434 | 5.1. 二重周期函数 | 457 |
| 2.2. 直交多項式系 | 435 | 5.2. ワイエルシュトラスの 楕円函数 | 458 |
| 2.3. ルジャンドルの多項式 | 435 | 5.3. 楕円函数の表示 | 462 |
| 2.4. チェビシユフの多項式 | 439 | 5.4. 楕円 \wp 函数 | 464 |
| 2.5. ラゲルの多項式・ソニン の多項式 | 440 | 5.5. ヤコビの楕円函数 | 467 |
| 2.6. エルミトの多項式 | 443 | 5.6. 楕円積分 | 467 |
| 3. ルジャンドル函数 | 444 | 5.7. モジュラ函数 | 468 |
| 3.1. 第一種の球函数 | 444 | 6. 楕円体函数 | 470 |
| 3.2. 第二種の球函数 | 446 | 6.1. マシユウ函数 | 470 |
| 3.3. ルジャンドルの陪函数 | 447 | 6.2. ラメ函数 | 471 |

XI. 偏微分方程式 [平沢義一・西本敏彦]

A. 一階偏微分方程式

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> 1. 線形・準線形方程式…………… 473 1.1. 偏微分方程式とその解…………… 473 1.2. 線形方程式…………… 474 1.3. 準線形方程式…………… 475 2. 非線形方程式…………… 478 | <ul style="list-style-type: none"> 2.1. 解の分類…………… 478 2.2. 特性微分方程式…………… 479 2.3. 完全解が容易に求まる 方程式…………… 481 |
|--|---|

B. 二階偏微分方程式

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> 1. 型の分類…………… 483 1.1. 特性曲線・特性曲面…………… 483 1.2. 型の分類…………… 485 1.3. モンジュ・アンペールの方程式…………… 488 | <ul style="list-style-type: none"> 2. グリーンの公式・数理物理学 上の考察…………… 490 2.1. グリーンの公式…………… 490 2.2. 重ね合わせの原理…………… 492 2.3. 問題の適切性…………… 493 |
|---|--|

C. 楕円型・双曲型・放物型方程式

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> 1. 楕円型方程式…………… 494 1.1. ラプラスの方程式…………… 494 1.2. グリーン函数・ポアッソン積分…………… 496 1.3. 境界値問題…………… 498 1.4. ポアッソンの方程式…………… 500 1.5. ヘルムホルツの方程式…………… 502 2. 双曲型方程式…………… 503 2.1. 初期値問題…………… 503 2.2. 1次元波動方程式と絃の振動…………… 504 | <ul style="list-style-type: none"> 2.3. リーマンの方法…………… 506 2.4. 2次元・3次元の波動方程式…………… 508 2.5. 一般次元の波動方程式…………… 510 3. 放物型方程式…………… 512 3.1. 熱伝導方程式…………… 512 3.2. 基本解・ポアッソンの公式…………… 514 3.3. 第一種初期値境界値問題…………… 515 3.4. グリーン函数…………… 517 3.5. 一般的な放物型方程式…………… 519 |
|--|---|

XII. 確 率 論 [魚返 正]

A. 古典的 確率論

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> 1. 確率の定義…………… 522 1.1. 等確率の仮定…………… 522 | <ul style="list-style-type: none"> 1.2. 幾何学的確率…………… 523 1.3. 確率空間…………… 524 |
|---|--|

| | | | |
|-----------------|-----|----------------|-----|
| 2. 事象間の関係…………… | 527 | 2.2. 独立事象…………… | 528 |
| 2.1. 条件付確率…………… | 527 | | |

B. 確 率 変 数

| | | | |
|-----------------------|-----|----------------------|-----|
| 1. 確率変数…………… | 530 | 2.3. ベルヌイ試行に関連する | |
| 1.1. 確率変数と確率分布…………… | 530 | 分布…………… | 539 |
| 1.2. 期待値・分散・相関係数・ | | 2.4. 多次元分布…………… | 540 |
| 条件付分布…………… | 532 | 2.5. 対称なランダム・ウォーク | |
| 1.3. 母関数・積率母関数・ | | に関連する分布…………… | 541 |
| 特性関数…………… | 535 | 3. 確率変数列…………… | 541 |
| 2. 特殊な確率分布…………… | 537 | 3.1. 確率変数列の収束…………… | 541 |
| 2.1. ポアソン分布に関連 | | 3.2. 独立確率変数項の級数…………… | 542 |
| する分布…………… | 537 | 3.3. 極限定理…………… | 542 |
| 2.2. 正規分布に関連する分布…………… | 538 | 3.4. マルチンゲール…………… | 543 |

C. 確 率 過 程

| | | | |
|------------------|-----|-------------------|-----|
| 1. マルコフ過程…………… | 544 | 2. 定常過程…………… | 550 |
| 1.1. マルコフ連鎖…………… | 544 | 2.1. スペクトル表現…………… | 550 |
| 1.2. 加法過程…………… | 547 | 2.2. 強定常過程…………… | 553 |
| 1.3. 拡散過程…………… | 548 | 2.3. 正規過程…………… | 553 |

| | |
|-------|-----|
| 参 考 書 | 556 |
|-------|-----|

索 引

| | |
|-----------|-----|
| 人名索引…………… | 563 |
| 事項索引…………… | 567 |