

目 次

は し が き (xvii)

本書使用上の注意 (訳者) (xvii)

記 号 (xviii)

0. 序	1~20
0.1 有 限 和	1
0.11 等差数列 (1)	0.12 自然数のべきの和 (1)
0.13 自然数の逆数の和 (2)	0.14 自然数の逆数の積の和 (3)
0.15 二項係数の和 (3)	
0.2 数値級数と無限乗積	5
0.21 数値級数の収束 (5)	0.22 収束判定法 (5)
0.23-0.24 数値級数の例 (7)	0.25 無限乗積 (11)
0.26 無限乗積の例 (12)	
0.3 関 数 級 数	12
0.30 定義と定理 (12)	0.31 べき級数 (13)
0.32 三角級数 (16)	0.33 漸近級数 (18)
0.4 微分計算の公式	18
0.41 パラメータに関する定積分の微分法 (18)	0.42 積の n
次導関数 (Leibnitz の公式) (19)	0.43 合成関数の n 次導関数

(19)

1. 初 等 関 数	21~52	
1.1 二 項 の べ き	21	
1.11 べき級数 (21)	1.12 有理分数級数 (22)	
1.2 指 数 関 数	22	
1.21 級数表示 (22)	1.22 関数関係 (23)	
1.23 指数級数 (23)		
1.3-1.4 三 角 関 数 お よ び 双 曲 線 関 数	23	
1.30 序 (23)	1.31 基本的関数関係 (24)	1.32 偏角 (角 度) の倍数の関数による三角関数および双曲線関数のべきの表現 (25)
1.33 三角関数および双曲線関数のべきによる偏角 (角 度) の倍数の三角関数および双曲線関数の表現 (27)	1.34 三 角関数および双曲線関数の和 (29)	1.35 倍数角の三角関数の べきの和 (30)
1.36 倍数角の三角関数の積の和 (32)	1.37 倍数角の正接の和 (32)	1.38 双曲線正接および双曲線 余接に等しくなる和 (32)
1.39 有限積としての倍数角の正弦 および余弦の表現 (33)	1.41 べき級数による三角関数および 双曲線関数の展開 (34)	1.42 分数級数展開 (36)
1.43 無限乗積による表現 (37)	1.44-1.45 三角級数 (Fourier 級数) (38)	1.46 指数関数および三角関数の積の級数 (42)
1.47 双曲線関数級数 (42)	1.48 Lobachevsky の “平行角” $\Pi(x)$ (43)	1.49 双曲線振幅 (Gudermann 関数) $gd\ x$ (43)
1.5 対 数 関 数	44	
1.51 級数表現 (44)	1.52 対数関数の級数 (46)	
1.6 逆三角関数および逆双曲線関数	47	
1.61 定義領域 (47)	1.62-1.63 関数関係 (47)	
1.64 級数表現 (51)		

98f

2. 初等関数の不定積分

53~210

2.0 序	53
2.00 一般的注意 (53)	
2.01 基本積分 (54)	
2.02 一般公式 (55)	
2.1 有理関数	56
2.10 一般積分則 (56)	
2.11-2.13 $a+bx^k$ を含む形 (58)	
2.14 $1\pm x^n$ を含む形 (63)	
2.15 $z=a+bx$ と $\alpha+\beta x$ を含む形 (66)	
2.16 三項 $a+bx^k+cx^{2k}$ を含む形 (67)	
2.17 $a+bx^2+cx^4$ と x のべきを含む形 (68)	
2.18 $a+bx^2+cx^4$ と $\alpha+\beta x$ を含む形 (70)	
2.2 代数関数	70
2.20 序 (70)	
2.21 $a+bx^k$ と \sqrt{x} を含む形 (71)	
2.22-2.23 $n\sqrt{(a+bx)^k}$ を含む形 (72)	
2.24 $\sqrt{a+bx}$ と二項 $\alpha+\beta x$ を含む形 (75)	
2.25 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ を含む形 (80)	
2.26 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ と x の整数べきを含む形 (81)	
2.27 $\sqrt{a+cx^2}$ と x の整数べきを含む形 (86)	
2.28 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ と一次、二次多項式を含む形 (89)	
2.29 だ円積分および擬似だ円積分に帰着する積分 (90)	
2.3 指数関数	92
2.31 e^{ax} を含む形 (92)	
2.32 x の有理関数と指数関数 (92)	
2.4 双曲線関数	93
2.41-2.43 $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x, \operatorname{cth} x$ のべき (93)	
2.44-2.45 双曲線関数の有理関数 (107)	
2.46 双曲線関数の代数関数 (113)	
2.47 双曲線関数とべき (119)	
2.48 双曲線関数, 指数関数, べき (128)	

2.5-2.6 三角関数	129
2.50 序 (129)	2.51-2.52 三角関数のべき (130)
2.53-2.54 倍数角の正弦, 余弦および偏角の一次関数, より複雑な関数の正弦, 余弦 (139)	2.55-2.56 正弦, 余弦の有理関数 (147)
2.57 $\sqrt{a \pm b \sin x}$ または $\sqrt{a \pm b \cos x}$ を含む形, およびこれらの形に帰せられるもの (153)	2.58-2.62 だ円積分および擬だ円積分に帰せられる積分 (157)
2.63-2.65 三角関数とべきの積分 (182)	2.66 三角関数と指数関数の組み合わせ (194)
2.67 三角関数と双曲線関数の組み合わせ (198)	
2.7 対数関数と逆双曲線関数	203
2.71 対数関数 (203)	2.72-2.73 対数関数と代数関数の組み合わせ (203)
2.74 逆双曲線関数 (206)	
2.8 逆三角関数	207
2.81 \arcsin と \arccos (207)	2.82 \arcsec , $\operatorname{arccosec}$, \arctan , $\operatorname{arccotan}$ (207)
2.83 \arcsin , \arccos と代数関数の組み合わせ (208)	2.84 \arcsec , $\operatorname{arccosec}$ と x のべき関数 (209)
2.85 \arctan , arccot と代数関数の組み合わせ (209)	
3.-4. 初等関数の定積分	211~625
3.0 序	211
3.01 一般的性質 (211)	3.02 定積分における変数変換 (212)
3.03 一般公式 (213)	3.04 変格積分 (215)
3.05 変格積分の主値 (216)	
3.1-3.2 べき関数と代数関数	217
3.11 有理関数 (217)	3.12 有理関数と一次, 二次多項式の平方根に帰着される表式の積 (219)
3.13-3.17 三次, 四次多項式の平方根と有理関数との積 (219)	3.18 二次多項式の四乗根に帰着される表式と有理関数との積 (282)
3.19-3.23 x のべ	

きと $(\alpha + \beta x)$ のべき (284) 3.24-3.27 x のべき, $\alpha + \beta x^p$
 の形の二項式のべきおよび x の多項式のべき (292)

3.3-3.4 指数関数304

3.31 指数関数 (304) 3.32-3.34 より複雑な変数の指数関数
 (306) 3.35 指数関数と有理関数の組み合わせ (310)
 3.36-3.37 指数関数と代数関数の組み合わせ (315)
 3.38-3.39 指数関数と任意のべき関数の組み合わせ (317)
 3.41-3.44 べきの有理関数と指数関数の有理関数の組み合わせ
 (325) 3.45 べき関数と指数関数の代数関数 (335)
 3.46-3.48 より複雑な指数を持つ指数関数とべき関数の組み合
 わせ (337)

3.5 双曲線関数344

3.51 双曲線関数 (344) 3.52-3.53 双曲線関数と代数関数の
 組み合わせ (347) 3.54 双曲線関数と指数関数 (356)
 3.55-3.56 双曲線関数, 指数関数, べき関数の組み合わせ (360)

3.6-4.1 三角関数365

3.61 正弦, 余弦の有理関数と多重角を持つ三角関数 (365)
 3.62 三角関数のべき (369) 3.63 三角関数のべきと一次関数
 の三角関数のべき (372) 3.64-3.65 三角関数のべきと三角関
 数の有理関数 (377) 3.66 三角関数の一次関数のべきを含む形
 (382) 3.67 三角関数を含む表式の平方根 (386) 3.68 三
 角関数のべきのさまざまな形 (389) 3.69-3.71 より複雑な偏
 角の三角関数 (395) 3.72-3.74 三角関数と有理関数の組み合
 わせ (405) 3.75 三角関数と代数関数の組み合わせ (418)
 3.76-3.77 三角関数とべきの組み合わせ (420)
 3.78-3.81 x の有理関数と三角関数の有理関数 (432)
 3.82-3.83 べきと結合した三角関数のべき (446)
 3.84 $\sqrt{1-k^2\sin^2x}$, $\sqrt{1-k^2\cos^2x}$ および同様の表式を含む積分
 (460) 3.85-3.88 べきと結合したより複雑な偏角の三角関数
 (464) 3.89-3.91 三角関数と指数関数 (476) 3.92 より

複雑な偏角を持つ三角関数が指数関数と組み合わせさせた場合 (484)

3.93 三角関数の三角関数と三角関数の指数関数 (486)

3.94-3.97 三角関数, 指数関数, べき関数の組み合わせ (489)

3.98-3.99 三角関数と双曲線関数の組み合わせ (503)

4.11-4.12 三角関数, 双曲線関数, べき関数 (511) 4.13 三角関数, 双曲線関数および指数関数 (519) 4.14 三角関数, 双曲線関数, 指数関数, べき関数 (521)

4.2-4.4 対数関数523

4.21 対数関数 (523) 4.22 より複雑な対数関数 (525)

4.23 対数関数と有理関数 (532) 4.24 対数関数と代数関数 (535) 4.25 対数関数とべき関数 (537) 4.26-4.27 対数のべきとべき関数 (539) 4.28 $\ln x$ の有理関数とべき関数 (552)

4.29-4.32 より複雑な対角関数とべき関数 (555)

4.33-4.34 対数関数と指数関数の組み合わせ (573)

4.35-4.36 対数関数, 指数関数, べき関数 (575) 4.37 対数関数と双曲線関数 (580) 4.38-4.41 対数関数と三角関数の組み合わせ (583) 4.42-4.43 対数関数, 三角関数, べき関数 (598) 4.44 対数関数, 三角関数, 指数関数 (605)

4.5 逆三角関数605

4.51 逆三角関数(605) 4.52 \arcsin, \arccos とべき関数(606)

4.53-4.54 $\text{arctg}, \text{arcctg}$ とべき関数(607) 4.55 逆三角関数と指数関数(611) 4.56 arctg と双曲線関数(612)

4.57 三角関数と逆三角関数(612) 4.58 三角関数, 逆三角関数, べき関数(614) 4.59 逆三角関数と対数関数(614)

4.6 多重積分614

4.60 多重積分における変数の変換(614) 4.61 積分の順序の交換と変数の交換(615) 4.62 一定の極限值を持つ二重, 三重積分(618) 4.63-4.64 多重積分(620)

5. 特殊関数の不定積分	626~634
5.1 だ円積分とだ円関数	626
5.11 完全だ円積分 (626)	5.12 だ円積分 (627)
5.13 Jacobi のだ円関数 (629)	5.14 Weierstrass のだ円関数 (631)
5.2 積分指数関数	632
5.21 積分指数関数 (632)	5.22 積分指数関数とべきの組み合わせ (632)
5.23 積分指数関数と指数関数の組み合わせ (632)	
5.3 積分正弦関数と積分余弦関数	632
5.4 確率積分関数と Fresnel 積分関数	633
5.5 Bessel 関数	633
6.-7. 特殊関数の定積分	635~903
6.1 だ円積分とだ円関数	635
6.11 $F(x, k)$ を含む形 (635)	6.12 $E(x, k)$ を含む形 (636)
6.13 だ円積分の母数に関する積分 (636)	6.14-6.15 完全だ円積分 (637)
6.16 テータ関数 (638)	
6.2-6.3 積分指数関数とそれから派生した関数	639
6.21 積分関数 (639)	6.22-6.23 積分指数関数 (641)
6.24-6.26 積分正弦関数, 積分余弦関数 (643)	6.27 積分双曲線正弦関数, 積分双曲線余弦関数 (647)
6.28-6.31 確率積分 (648)	6.32 Fresnel 積分 (653)
6.4 ガンマ関数とそれから作られる関数	655
6.41 ガンマ関数 (655)	6.42 ガンマ関数, 指数関数, べき関数 (656)
6.43 ガンマ関数と三角関数 (660)	6.44 ガンマ関数の対数 (661)
6.45 不完全ガンマ関数 (662)	

6.46-6.47	プサイ関数 ($\psi(x)$) (664)	
6.5-6.7	Bessel 関数	665
6.51	Bessel 関数 (665)	6.52 Bessel 関数と x, x^2 の組み合わせ (672)
6.53-6.54	Bessel 関数と有理関数 (677)	
6.55	Bessel 関数と代数関数 (681)	6.56-6.58 Bessel 関数とべき関数 (683)
6.59	より複雑な変数を持つ Bessel 関数とべき級数 (700)	6.61 Bessel 関数と指数関数 (707)
6.62-6.63	Bessel 関数, 指数関数, べき関数の組み合わせ (711)	
6.64	より複雑な変数を持つ Bessel 関数と指数関数, べき関数 (720)	6.65 より複雑な変数を持つ Bessel 関数と指数関数およびべき関数 (723)
6.66	Bessel 関数, 双曲線関数, 指数関数 (726)	6.67-6.68 Bessel 関数と三角関数 (730)
6.69-6.74	Bessel 関数, 三角関数, べき関数 (743)	
6.75	Bessel 関数, 三角関数, 指数関数, べき関数 (762)	
6.76	Bessel 関数, 三角関数, 双曲線関数 (767)	6.77 Bessel 関数と対数関数または arctangent (767)
6.78	Bessel 関数と他の特殊関数の組み合わせ (768)	6.79 次数に関する Bessel 関数の積分 (770)
6.8	Bessel 関数から派生する関数	775
6.81	Struve 関数 (775)	6.82 Struve 関数, 指数関数, べき関数 (777)
6.83	Struve 関数と三角関数の組み合わせ (778)	
6.84-6.85	Struve 関数と Bessel 関数 (779)	6.86 Lommel 関数 (784)
6.87	Tomson 関数 (787)	
6.9	Mathieu 関数	788
6.91	Mathieu 関数 (788)	6.92 Mathieu 関数, 双曲線関数, 三角関数 (789)
6.93	Mathieu 関数, Bessel 関数の組み合わせ (793)	
7.1-7.2	Legendre 陪関数	794
7.11	Legendre 陪関数 (794)	7.12-7.13 Legendre 陪関数と

べき関数 (795)	7.14 Legendre 陪関数, 指数関数, べき関数 (803)	7.15 Legendre 陪関数と双曲線関数 (806)
7.16 Legendre 陪関数, べき関数および三角関数 (806)	7.17 Legendre 陪関数と確率積分 (810)	7.18 Legendre 陪関数と Bessel 関数 (810)
7.19 Legendre 陪関数と Bessel 関数から派生した関数 (817)	7.21 Legendre 陪関数の次数に関する積分 (819)	7.22 Legendre の多項式, 有理関数, 代数関数 (820)
7.23 Legendre の多項式とべき関数 (822)	7.24 Legendre の多項式と他の初等関数 (823)	7.25 Legendre の多項式と Bessel 関数 (825)
7.3-7.4 直交多項式	826	
7.31 Gegenbauer の多項式 $C_n^\nu(x)$ とべき関数 (826)	7.32 多項式 $C_n^\nu(x)$ と初等関数 (830)	7.33 多項式 $C_n^\nu(x)$ と Bessel 関数. Gegenbauer 関数の次数に関する積分 (831)
7.34 Chebyshev の多項式とべき関数 (833)	7.35 Chebyshev の多項式と初等関数 (835)	7.36 Chebyshev の多項式と Bessel 関数 (836)
7.37-7.38 Hermite の多項式 (836)	7.39 Jacobi の多項式 (841)	7.41-7.42 Laguerre の多項式 (843)
7.5 超幾何関数	848	
7.51 超幾何関数とべき関数 (848)	7.52 超幾何関数と指数関数 (850)	7.53 超幾何関数と三角関数 (853)
7.54 超幾何関数と Bessel 関数 (853)		
7.6 合流型超幾何関数	857	
7.61 合流型超幾何関数とべき関数 (857)	7.62-7.63 合流型超幾何関数と指数関数 (859)	7.64 合流型超幾何関数と三角関数 (869)
7.65 合流型超幾何関数と Bessel 関数 (870)	7.66 合流型超幾何関数, Bessel 関数, べき関数 (871)	7.67 合流型超幾何関数, Bessel 関数, 指数関数, べき関数 (876)
7.68 合流型超幾何関数とその他の特殊関数 (881)	7.69 次数	

に関する合流型超幾何関数の積分 (884)

7.7 放物柱関数885

7.71 放物柱関数 (885) 7.72 放物柱関数, べき関数, 指数関数 (885) 7.73 放物柱関数と双曲線関数 (887) 7.74 放物柱関数と三角関数 (888) 7.75 放物柱関数と Bessel 関数 (889) 7.76 放物柱関数と合流型超幾何関数 (894) 7.77 次数に関する放物柱関数の積分 (895)

7.8 Meijer 関数と MacRobert 関数 (G と E)896

7.81 関数 G, E と初等関数 (896) 7.82 関数 G, E と Bessel 関数 (900) 7.83 関数 G, E とその他の特殊関数 (903)

8.-9. 特殊関数 904~1080

8.1 だ円積分とだ円関数904

8.11 だ円積分 (904) 8.12 だ円積分の間の関係 (907) 8.13 だ円関数 (909) 8.14 Jacobi のだ円関数 (910) 8.15 Jacobi のだ円関数の性質とそれらの関係 (914) 8.16 Weierstrass 関数 $\wp(u)$ (917) 8.17 関数 $\zeta(u)$ および $\sigma(u)$ (920) 8.18-8.19 \wp 関数 (921)

8.2 積分指数関数とそれから派生する関数925

8.21 積分指数関数 $Ei(x)$ (925) 8.22 積分双曲線正弦関数 $\operatorname{shi}(x)$ と積分双曲線余弦関数 $\operatorname{chi}(x)$ (928) 8.23 積分正弦関数 $\operatorname{si}(x)$ と積分余弦関数 $\operatorname{ci}(x)$ (928) 8.24 積分対数関数 $\operatorname{li}(x)$ (929) 8.25 確率積分と Fresnel 積分; $\Phi(x)$ と $S(x), C(x)$ (930) 8.26 Labachevskii 関数 $L(x)$ (933)

8.3 Euler の第一種, 第二種積分とそれから派生する関数933

8.31 ガンマ関数 (Euler の第二種積分) $\Gamma(z)$ (933) 8.32 ガンマ関数の級数表示, 乗積表示 (935) 8.33 ガンマ関数を含む関数の関係 (937) 8.34 ガンマ関数の対数 (939)

8.35 不完全ガンマ関数 (940)	8.36 psi 関数 $\psi(x)$ (943)
8.37 $\beta(x)$ 関数 (947)	8.38 ベータ関数 (第一種の Euler 積分); $B(x, y)$ (948)
8.39 不完全ベータ関数 $B_x(p, q)$ (950)	
8.4-8.5 Bessel 関数とそれに関係した関数951	
8.40 定義 (951)	8.41 関数 $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$ の積分表示 (952)
8.42 関数 $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ の積分表示 (955)	
8.43 関数 $I_\nu(z)$ と $K_\nu(z)$ の積分表示 (958)	8.44 級数表示 (959)
8.45 Bessel 関数の漸近展開 (961)	8.46 半奇数次の Bessel 関数 (965)
8.47-8.48 関数関係 (967)	
8.49 Bessel 関数を解に持つ微分方程式 (971)	
8.51-8.52 Bessel 関数の級数 (973)	8.53 Bessel 関数の積の形の展開 (979)
8.54 Bessel 関数のゼロ点 (980)	
8.55 Struve 関数 (982)	8.56 Thomson 関数とその一般形 (983)
8.57 Lommel 関数 (985)	8.58 Anger 関数, Weber 関数; $J_\nu(z)$ および $E_\nu(z)$ (988)
8.59 Neumann の多項式 $O_n(z)$ と Schläfli の多項式 $S_n(z)$ (989)	
8.6 Mathieu 関数991	
8.60 Mathieu 方程式 (991)	8.61 周期的 Mathieu 関数 (991)
8.62 係数 $A_{2r}^{(2n)}$, $A_{2r+1}^{(2n+1)}$, $B_{2r+1}^{(2n+1)}$, $B_{2r+2}^{(2n+2)}$ に対する漸化式 (992)	
8.63 純虚数変数の Mathieu 関数 (992)	8.64 Mathieu 方程式の非周期解 (993)
8.65 q が負の場合の Mathieu 関数 (993)	
8.66 Mathieu 関数を Bessel 関数の級数として表示すること (994)	
8.67 一般定理 (997)	
8.7-8.8 Legendre 陪関数998	
8.70 序 (998)	8.71 積分表示 (1000)
8.72 $ \nu $ が大きいときの漸近展開 (1002)	8.73-8.74 関数関係 (1004)
8.75 特別な場合, 特別の値 (1007)	8.76 ν に関する微分 (1009)
8.77 級数表示 (1009)	8.78 Legendre 陪関数のゼロ点 (1012)
8.79 Legendre 陪関数の級数 (1013)	
8.81 ν , μ が整数の場合 (1014)	8.82-8.83 Legendre 関数

	(1016)	8.84	円すい関数 (1020)	8.85	円環関数 (1022)	
8.9	直交多項式					1023
	8.90	序 (1023)	8.91	Legendre の多項式 (1025)		
	8.92	Legendre の多項式の級数 (1027)	8.93	Gegenbauer の多項式; $C_n^\lambda(t)$ (1029)	8.94	Chebyshev の多項式; $T_n(x)$ と $U_n(x)$ (1032)
	8.95	Hermite の多項式; $H_n(x)$ (1033)	8.96	Jacobi の多項式 (1035)	8.97	Laguerre の多項式 (1037)
9.1	超幾何関数					1039
	9.10	定義 (1039)	9.11	積分表示 (1040)	9.12	超幾何関数による初等関数の表現 (1040)
	9.13	超幾何級数で定義される関数の変換則と解析接続 (1042)	9.14	一般化された超幾何級数 (1045)	9.15	超幾何微分方程式 (1045)
	9.16	Riemann の微分方程式 (1049)	9.17	2階微分方程式を Riemann の P 関数で表現すること (1052)	9.18	二変数を持つ超幾何関数 (1053)
	9.19	多変数の超幾何関数 (1057)				
9.2	合流型超幾何関数					1057
	9.20	序 (1057)	9.21	関数 $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ および $\Psi(\alpha, \gamma; z)$ (1058)	9.22-9.23	Whittaker 関数 $M_{\lambda, \mu}(z)$ および $W_{\lambda, \mu}(z)$ (1059)
	9.24-9.25	放物柱関数 $D_p(z)$ (1064)	9.26	二変数を持つ合流型超幾何級数 (1067)		
9.3	Meijer の G-関数					1068
	9.30	定義 (1068)	9.31	関数関係 (1069)	9.32	G -関数に対する微分方程式 (1070)
	9.33	G -関数の級数 (1070)	9.34	他の特殊関数との関係 (1070)		
9.4	MacRobert の E-関数					1071
	9.41	多重積分による表現 (1071)	9.42	関数関係 (1072)		

9.5 Riemann のゼータ関数 $\zeta(z, q)$, $\zeta(z)$, および関数 $\Phi(z, s, v)$ および $\xi(s)$	1072
9.51 定義および積分表示 (1072)	9.52 級数または無限乗積による表現 (1073)
9.53 関数関係 (1073)	9.54 特異点とゼロ点 (1074)
9.55 関数 $\Phi(z, s, v)$ (1075)	9.56 関数 $\xi(s)$ (1076)
9.6 Bernoulli 数, Bernoulli の多項式, Euler 数および関数 $v(x)$, $v(x, \alpha)$, $\mu(x, \beta, \alpha)$, $\lambda(x, y)$	1076
9.61 Bernoulli 数 (1076)	9.62 Bernoulli の多項式 (1077)
9.63 Euler 数 (1078)	9.64 関数 $v(x)$, $v(x, \alpha)$, $\mu(x, \beta)$, $\mu(x, \beta, \alpha)$, $\lambda(x, y)$ (1079)
9.7 定 数	1079
9.71 Bernoulli 数 (1079)	9.72 Euler 数 (1080)
9.73 Euler の定数と Catalan の定数 (1080)	
特殊関数の索引と記号 (1081)	
引用文献 (1084)	