

目 次

緒 言

第1章 物理数学における限定問題の設定

§ 1. 点集合, 関数および作用素に関する基本概念と諸定理	1
1. R^n における点集合	1
2. 関数族 $C^p(G)$ と $C^p(\bar{G})$	3
3. 連続関数の空間 $C(T)$	4
4. ルベーク積分	5
5. 関数空間 $L^2(G)$	11
6. 正規直交系	14
7. 完全正規直交系	16
8. 線形作用素, 線形汎関数	19
9. 線形方程式	21
10. エルミート作用素	23
§ 2. 物理数学における基本的な方程式	25
1. 振動方程式	25
2. 拡散方程式	28
3. 定常状態の方程式	29
4. 輸送方程式	30
5. 流体方程式	31
6. マックスウェル方程式	32
7. シュレーディンガー方程式	33
8. クライン・ゴールドン方程式とディラック方程式	33

§ 3. 2階線形微分方程式の分類	34
1. 方程式の1点における分類	34
2. ラプラシアン <small>の</small> 球座標表示と円柱座標表示	36
3. 特性面	37
4. 2独立変数の方程式の標準形	39
5. 例. トリコミー方程式	44
§ 4. 2階微分方程式の基本的限定問題の設定	45
1. 限定問題の分類	45
2. コーシー問題	46
3. コーシー問題設定の際の特性面の役割	47
4. 楕円型方程式の境界値問題	49
5. 混合問題	49
6. 物理数学における問題の適切性	50
7. コワレフスカヤの定理	51
8. アダマールの例	52
9. 古典解と超関数解	53

第2章 超 関 数

§ 5. 基礎関数と超関数	54
1. はじめに	54
2. 基礎関数の空間 \mathcal{D}	56
3. 超関数の空間 \mathcal{D}'	59
4. 超関数の台	60
5. 正則超関数	62
6. 特異超関数	63
7. ソホツキーの公式	65
8. 超関数の変数の線形変換	66
9. 超関数の乗法	66
10. 演習問題	67

§ 6. 超関数の微分	68
1. 超関数の導関数	68
2. 導超関数の性質	69
3. 例, $n=1$	70
4. 演習問題	74
5. 例, $n \geq 2$	74
§ 7. 超関数の直積とたたみこみ	82
1. 直積の定義	82
2. 直積の可換性	85
3. 直積の諸性質	86
4. 超関数のたたみこみ	88
5. たたみこみの存在条件	90
6. たたみこみの微分	92
7. 超関数の正則化	93
8. たたみこみの例. ニュートン-ポテンシャル	94
9. 演習問題	96
§ 8. 緩増加超関数	97
1. 基礎関数の空間 \mathcal{S}	97
2. 緩増加超関数の空間 \mathcal{S}'	98
3. 緩増加超関数の例	99
4. 1点を台とする超関数の構造	101
5. 緩増加超関数の直積	102
6. 緩増加超関数のたたみこみ	103
§ 9. 緩増加超関数のフーリエ変換	104
1. \mathcal{S} におけるフーリエ変換	104
2. \mathcal{S}' におけるフーリエ変換	106
3. フーリエ変換の性質	107
4. コンパクトな台をもつ超関数のフーリエ変換	109

5. たたみこみのフーリエ変換	110
6. 例, $n=1$	111
7. 演習問題	114
8. 例, $n \geq 2$	114

第3章 コーシー問題

§ 10. 線形微分作用素の基本解	118
1. 線形微分方程式の超関数解	118
2. 基本解	119
3. 非斉次方程式	121
4. 階数低下法	122
5. 線形常微分作用素の基本解	125
6. 熱伝導作用素の基本解	125
7. ダランベルシアンの基本解	126
8. ラプラシアンの基本解	128
9. ヘルムホルツ作用素の基本解	130
10. コーシー・リーマン作用素の基本解	131
11. 輸送作用素の基本解	131
12. 演習問題	132
§ 11. 遅延ポテンシャル	133
1. ダランベルシアンの基本解の性質	133
2. たたみこみの拡張とその性質	135
3. 遅延ポテンシャル	138
4. 面分布遅延ポテンシャル	141
§ 12. 波動方程式のコーシー問題	145
1. 線形常微分方程式に対するコーシー問題	145
2. 波動方程式に対する超関数的コーシー問題	146
3. 超関数的コーシー問題の解	148

4. 古典的コーシー問題の解	149
5. 演習問題	150
§ 13. 波動の伝播	151
1. 空間中の波動の伝播	152
2. 平面上の波動の伝播	153
3. 直線上の波動の伝播	155
4. 波動伝播法	157
5. 反射の方法, 半無限の絃	159
6. 反射の方法, 有限の絃	161
§ 14. 熱伝導方程式に対するコーシー問題	163
1. 温度ポテンシャル	163
2. 面分布温度ポテンシャル	165
3. 熱伝導方程式に対する超関数的コーシー問題	166
4. コーシー問題の解	167
5. 演習問題	168

第4章 積分方程式

§ 15. 逐次近似法	171
1. 連続核積分方程式	171
2. 反復核, レゾルベント	174
3. ボルテラ積分方程式	176
4. 極性核積分方程式	178
5. 演習問題	182
§ 16. フレドホルムの定理	183
1. 退化核積分方程式	184
2. 退化核積分方程式に対するフレドホルムの定理	186
3. 連続核積分方程式に対するフレドホルムの定理	188

4.	フレドホルムの定理の系	192
5.	極性核積分方程式に対するフレドホルムの定理	194
6.	演習問題	195
§ 17.	エルミート核積分方程式	196
1.	連続エルミート核をもつ積分作用素	196
2.	アルツェラの補題	197
3.	連続エルミート核積分方程式	199
4.	極性エルミート核積分方程式	201
§ 18.	ヒルベルト・シュミットの定理とそれからの帰結	202
1.	連続エルミート核に対するヒルベルト・シュミットの定理	202
2.	反復核の固有関数展開	204
3.	連続エルミート核の固有関数展開	205
4.	連続エルミート核をもつ非斉次積分方程式の解	207
5.	正 値 核	208
6.	極性エルミート核積分方程式の場合へのヒルベルト・シュミットの定理の拡張	209
7.	イェンチの定理	211
8.	ケロッグの方法	213
9.	演習問題	215

第5章 楕円型方程式の境界値問題

§ 19.	固有値問題	217
1.	固有値問題の設定	217
2.	グリーン公式	218
3.	作用素 L の性質	219
4.	作用素 L の固有値および固有関数	220
5.	フーリエの方法 (変数分離)	224
6.	例	225

7. 固有値, 固有関数の物理的意味	228
8. 非斉次境界値問題の解の一意性	229
9. 演習問題	229
§ 20. スツルム・リュービルの問題	230
1. グリーン関数	230
2. スツルム・リュービルの問題	233
3. 固有値, 固有関数の性質	234
4. 固有値, 固有関数の求め方	235
§ 21. 調和関数	236
1. グリーン公式	236
2. グリーン公式の拡張	238
3. 算術平均の定理	240
4. 最大値原理	240
5. 最大値原理の系	241
6. 調和関数の除去可能な特異点	242
7. 調和超関数	243
8. 調和関数の性質	244
9. 調和関数のリュービルの定理	245
10. 演習問題	245
§ 22. ニュートン-ポテンシャル	246
1. 体ポテンシャル	246
2. 1重層ポテンシャル, 2重層ポテンシャル	248
3. ニュートン-ポテンシャルの物理的意味	250
4. リヤプーノフ曲面	251
5. 曲面 S 上の1重層, 2重層ポテンシャルの性質	253
6. 2重層ポテンシャルの不連続性	255
7. 1重層ポテンシャルの法線微分の不連続性	257
8. 演習問題	259

§ 23. ラプラス方程式, ポアソン方程式の境界値問題	259
1. 基本的境界値問題の設定	259
2. 調和関数の無限遠における挙動	260
3. 境界値問題の解の一意性の定理	261
4. 境界値問題の積分方程式への帰着	263
5. ポテンシャル論の積分方程式	265
§ 24. ディリクレ問題のグリーン関数	268
1. グリーン関数の定義と性質	268
2. グリーン関数の具体例 (鏡映法)	271
3. 境界値問題の解のグリーン関数による表示	273
4. ポアソン公式	274
5. 境界値問題の積分方程式への帰着	275
6. 固有値, 固有関数の性質	277
7. 演習問題	279
§ 25. 球関数	280
1. 球関数の定義	280
2. 球関数の微分方程式	281
3. ルジャンドル方程式	282
4. 母関数	283
5. ルジャンドル陪関数	285
6. 球関数	287
7. ラプラス公式	288
8. ラプラス方程式における変数分離	289
9. 球に対するディリクレ問題, ノイマン問題の解	290
§ 26. 平面におけるラプラス方程式の境界値問題	292
1. 調和関数の無限遠における挙動	292
2. 基本的境界値問題の設定と解の一意性	293
3. 対数ポテンシャル	294

4. 境界値問題の可解性	297
5. 円に対する境界値問題の解	299
6. ディリクレ問題のグリーン関数	301
7. 単連結領域におけるディリクレ問題の解	302
8. 演習問題	303
§ 27. ヘルムホルツ方程式	304
1. ゾンマーフェルトの輻射条件	305
2. 斉次ヘルムホルツ方程式	305
3. ポテンシャル	307
4. 極限吸収原理	309
5. 極限振幅原理	310
6. ヘルムホルツ方程式の境界値問題	311
7. 演習問題	312

第6章 混合問題

§ 28. フーリエの方法	314
1. 双曲型斉次方程式	314
2. 双曲型非斉次方程式	316
3. 放物型方程式	318
4. シュレーディンガー方程式	318
5. 楕円型方程式	319
6. 例	320
7. 演習問題	325
§ 29. 双曲型方程式の混合問題	325
1. 古典解. エネルギー積分	325
2. 古典解の一意性と連続依存性	327
3. $\mathcal{L}_2(G)$ で連続な関数	330
4. 広義解	332

5. 広義解の一意性と連続依存性	335
6. 広義解の存在	335
7. 演習問題	337
§ 30. 放物型方程式の混合問題	338
1. 古典解, 最大値原理	338
2. 古典解の一意性と連続依存性	340
3. 広義解	341
4. 広義解の一意性と連続依存性	342
5. 広義解の存在	342
演習問題の略解またはヒント	344
文 献	368
人名表	371
事項索引	373

訳者あとがき

