

目 次

訳者序文
序 文

第 1 章 集合論の基礎

§ 1. 集合, 集合の演算.....	1
1°. 基本的な定義 (1) 2°. 集合の演算 (2)	
§ 2. 集合の同値, 集合の濃度	5
1°. 有限および無限集合, 可算性 (5) 2°. 可算集合 (6)	
3°. 集合の同値 (9) 4°. 実数の非可算性 (11) 5°. 濃度 (12)	
6°. Cantor-Bernstein の定理 (15)	
§ 3. 写像, 類別	16
1°. 集合の写像, 函数の一般概念 (16) 2°. 類別, 同値関係 (19)	
§ 4. 全順序集合, 超限数.....	22
1°. 半順序集合 (22) 2°. 順序を保存する写像 (23) 3°. 全	
順序集合, 順序型 (24) 4°. 全順序集合の順序和 (25) 5°. 整	
列集合, 超限数 (25) 6°. 順序数の比較 (27) 7°. 選択公	
理, Zermelo の定理 (30) 8°. 超限帰納法 (31)	
§ 5. 集合系	32
1°. 集合環 (32) 2°. 集合の半環 (33) 3°. 半環により生成	
される環 (35) 4°. Borel 代数 (36) 5°. 集合系と写像 (37)	

第 2 章 距離空間と位相空間

§ 1. 距離空間	39
1°. 定義と基本的な例 (39) 2°. 距離空間の連続写像, 等長写	
像 (46)	
§ 2. 収束, 開集合と閉集合	48

1°.	集積点, 閉包 (48)	2°.	収束 (50)	3°.	稠密な部分集合 (51)
4°.	開集合と閉集合 (52)	5°.	直線上の開集合と閉集合 (54)		
§ 3.	完備距離空間				58
1°.	完備距離空間の定義と例 (58)	2°.	閉球列の原理 (61)		
3°.	Baire の定理 (62)	4°.	空間の完備化 (63)		
§ 4.	縮小写像とその応用				67
1°.	縮小写像の原理 (67)	2°.	縮小写像の原理の簡単な応用 (68)	3°.	微分方程式の一意解の存在定理 (71)
		4°.	縮小写像の原理の積分方程式への応用 (73)		
§ 5.	位相空間				76
1°.	位相空間の定義と例 (76)	2°.	位相の比較 (78)	3°.	基本近傍系, 基, 可算公理 (79)
		4°.	T における収束点列 (82)		
		5°.	分離公理 (83)	6°.	連続写像, 同相写像 (85)
		7°.	位相導入の種々の方法, 距離づけ可能性 (87)		
§ 6.	コンパクト性				89
1°.	コンパクト性の概念 (89)	2°.	コンパクトな空間の連続写像 (91)	3°.	可算コンパクト性 (92)
		4°.	相対コンパクト集合 (94)		
§ 7.	距離空間におけるコンパクト性				95
1°.	全有界性 (95)	2°.	コンパクト性と全有界性 (97)	3°.	距離空間の部分集合の相対コンパクト性 (98)
		4°.	Arzelà の定理 (99)	5°.	Peano の定理 (102)
		6°.	Arzelà の定理の一般化 (104)		
§ 8.	距離空間と位相空間の上の実函数				105
1°.	連続および一様連続函数と汎函数 (105)	2°.	コンパクトな空間上の連続函数と半連続函数 (107)		
§ 9.	距離空間における連続曲線				110
第 3 章 ノルム空間と位相線形空間					
§ 1.	線形空間				115

1°.	線形空間の定義と例 (115)	2°.	1次従属性 (117)	3°.			
	部分空間 (118)	4°.	商空間 (119)	5°.	線形汎函数 (120)		
	6°.	線形汎函数の幾何学的意味 (122)					
§ 2.	凸集合と凸汎函数, Hahn-Banach の定理124						
	1°.	凸集合と凸体 (124)	2°.	凸汎函数 (126)	3°.	Minkowski の汎函数 (127)	
		4°.	Hahn-Banach の定理 (128)		5°.	線形空間における凸集合の分離性 (132)	
§ 3.	ノルム空間133						
	1°.	ノルム空間の定義と例 (133)		2°.	ノルム空間の部分空間 (135)		
§ 4.	Euclid 空間136						
	1°.	Euclid 空間の定義 (136)	2°.	直交基の例 (138)	3°.	直交基の存在, 直交化 (140)	
		4°.	Bessel の不等式, 閉じた直交系 (142)		5°.	完備 Euclid 空間, Riesz-Fischer の定理 (146)	
	6°.	Hilbert 空間, 同形定理 (148)		7°.	部分空間, 直交補空間, 直和 (150)	8°.	Euclid 空間の特徴 (154)
		9°.	複素 Euclid 空間 (157)				
§ 5.	位相線形空間159						
	1°.	定義と例 (159)	2°.	局所凸空間 (162)	3°.	可算ノルム空間 (163)	

第4章 線形汎函数と線形作用素

§ 1.	連続線形汎函数167					
	1°.	位相線形空間における連続線形汎函数 (167)		2°.	線形汎函数の有界集合上における有界性と連続性との関係 (168)	
		3°.	ノルム空間における連続線形汎函数 (169)		4°.	ノルム空間における Hahn-Banach の定理 (172)
		5°.	可算ノルム空間における線形汎函数 (173)		6°.	十分に多くの(連続)線形汎函数の存在 (174)
§ 2.	共役空間175					

1°.	共役空間の定義 (175)	2°.	ノルム空間の共役空間 (175)	
3°.	共役空間の例 (177)	4°.	可算ノルム空間の共役空間の構造 (180)	
5°.	共役空間の位相 (182)	6°.	第二共役空間 (183)	
§ 3.	弱位相と弱収束185			
1°.	位相線形空間の弱位相 (185)	2°.	弱収束 (186)	
3°.	共役空間における弱位相と弱収束 (191)		4°.	有界集合における *-弱位相 (193)
§ 4.	超 函 数196			
1°.	函数概念の拡張 (196)	2°.	基本函数の空間 (197)	
3°.	超函数 (198)		4°.	超函数の演算 (199)
5°.	基本函数の集合の潤沢性 (202)		6°.	原始函数, 超函数の微分方程式 (203)
7°.	二, 三の一般化 (206)			
§ 5.	線形作用素209			
1°.	線形作用素の定義と例 (209)		2°.	連続性と有界性 (213)
3°.	作用素の和と積 (215)		4°.	逆作用素 (216)
5°.	共役作用素 (220)		6°.	Euclid 空間における共役作用素, 自己共役作用素 (222)
7°.	作用素のスペクトル, レゾルベント (223)			
§ 6.	完全連続作用素226			
1°.	完全連続作用素の定義と例 (226)		2°.	完全連続作用素の基本性質 (230)
3°.	完全連続作用素の固有値 (233)		4°.	Hilbert 空間における完全連続作用素 (234)
5°.	H における自己共役完全連続作用素 (235)			

第 5 章 測 度 論

§ 1.	平面上の集合の測度240			
1°.	基本集合の測度 (240)	2°.	平面上の集合の Lebesgue 測度 (244)	
3°.	Lebesgue 測度と可測集合の基本性質 (245)		4°.	二, 三の補足と一般化 (253)
§ 2.	測度の一般概念, 半環から環への測度の拡張, 加法性と σ -加法性255			

1°.	測度の定義 (255)	2°.	半環から環への測度の拡張 (257)	
3°.	加算加法性 (258)			
§ 3.	測度の Lebesgue 拡張		261	
1°.	単位元をもつ半環上の測度の Lebesgue 拡張 (261)	2°.	単位元をもたない半環上の測度の拡張 (265)	
		3°.	Jordan による測度の拡張 (267)	
		4°.	測度の拡張の一意性 (268)	
§ 4.	可測函数		270	
1°.	可測函数の定義と基本性質 (270)	2°.	単函数 (272)	
3°.	可測函数の演算 (273)	4°.	同値可測函数 (274)	
	5°.	殆ど到る所での収束 (275)	6°.	Egorov の定理 (275)
		7°.	測度の意味での収束 (277)	
		8°.	Luzin の定理, 性質-C (279)	
§ 5.	Lebesgue 積分		279	
1°.	単函数の Lebesgue 積分 (280)	2°.	有限測度の集合上の Lebesgue 積分 (282)	
		3°.	Lebesgue 積分の σ -加法性と絶対連続性 (284)	
		4°.	積分記号の中の極限移行 (289)	
		5°.	無限測度の集合上の Lebesgue 積分 (293)	
		6°.	Lebesgue 積分と Riemann 積分との比較 (294)	
§ 6.	集合系の直積と測度, Fubini の定理		297	
1°.	集合系の直積 (297)	2°.	測度の積 (299)	
		3°.	切り口の 1 次元測度の積分による 2 次元測度の表現と Lebesgue 積分の幾何学的定義 (301)	
		4°.	Fubini の定理 (303)	

第 6 章 Lebesgue 不定積分, 微分論

§ 1.	単調函数, 積分の上限についての微分可能性	308	
1°.	単調函数の基本性質 (308)	2°.	単調函数の微分可能性 (311)
		3°.	積分の上限による微分 (316)
§ 2.	有界変動函数	317	
§ 3.	Lebesgue 不定積分の導函数	320	
§ 4.	導函数による函数の復元, 絶対連続函数	323	

§ 5. 集合函数としての Lebesgue 積分, Radon-Nikodym の定理.....	332
1°. 複合測度, Hahn の分解と Jordan の分解 (332)	
2°. 複合測度の基本的な型 (336)	
3°. 絶対連続複合測度, Radon-Nikodym の定理 (336)	
§ 6. Stieltjes 積分.....	340
1°. Stieltjes 測度 (340)	
2°. Lebesgue-Stieltjes 積分 (342)	
3°. 確率論における Lebesgue-Stieltjes 積分の応用 (344)	
4°. Riemann-Stieltjes 積分 (345)	
5°. Stieltjes 積分の積分記号下の極限移行 (348)	
6°. $C_{[a, b]}$ における線形連続汎函数の一般形 (352)	

第 7 章 可積分函数の空間

§ 1. 空間 L_1	356
1°. 空間 L_1 の定義と基本性質 (356)	
2°. L_1 における稠密集合 (358)	
§ 2. 空間 L_2	362
1°. 空間 L_2 の定義と基本性質 (362)	
2°. 無限測度の場合 (365)	
3°. L_2 における稠密集合, 同形定理 (367)	
4°. 複素 L_2 空間 (368)	
5°. 二乗平均収束と他の型の収束との関係 (369)	
§ 3. L_2 における直交函数系, 直交系による級数	371
1°. 三角函数系, 三角級数 (371)	
2°. 区間 $[0, \pi]$ 上の三角函数系 (373)	
3°. 複素形の Fourier 級数 (374)	
4°. Legendre の多項式 (375)	
5°. 直積における直交系, Fourier の二重級数 (377)	
6°. 加重直交多項式 (379)	
7°. 空間 $L_2(-\infty, \infty)$ における直交系, Hermite 函数 (381)	
8°. 離散加重をもつ直交多項式 (382)	

第 8 章 三角級数, Fourier 変換

§ 1. Fourier 級数の収束条件	385
1°. Fourier 級数の一点における収束の十分条件 (385)	
2°.	

Fourier 級数の一様収束のための条件 (391)	
§ 2. Fejér の定理	394
1°. Fejér の定理 (394) 2°. 三角函数系の完備性, Weierstrass の定理 (397) 3°. 空間 L_1 に対する Fejér の定理 (398)	
§ 3. Fourier 積分	398
1°. 基本定理 (398) 2°. 複素形の Fourier 積分 (401)	
§ 4. Fourier 変換の性質と応用	402
1°. Fourier 変換と反転公式 (402) 2°. Fourier 変換の基本性 質 (405) 3°. Hermite 函数と Laguerre 函数の完備性 (408) 4°. 急速に減少する無限階微分可能な函数の Fourier 変換 (409) 5°. Fourier 変換とたたみこみ函数 (410) 6°. 熱伝導の方程式 の解に対する Fourier 変換の応用 (411) 7°. 多変数の函数の Fourier 変換 (412)	
§ 5. 空間 $L_2(-\infty, \infty)$ における Fourier 変換	415
1°. Plancherel の定理 (415) 2°. Hermite 函数 (418)	
§ 6. Laplace 変換	421
1°. Laplace 変換の定義と基本性質 (421) 2°. Laplace 変換 の微分方程式の解法への応用 (演算子法) (423)	
§ 7. Fourier-Stieltjes 変換	424
1°. Fourier-Stieltjes 変換の定義 (424) 2°. 確率論における Fourier-Stieltjes 変換の応用 (426)	
§ 8. 超函数の Fourier 変換	428

第 9 章 線形積分方程式

§ 1. 積分方程式の定義とこれに帰着する二, 三の問題	431
1°. 積分方程式の型 (431) 2°. 積分方程式に帰着する問題の 例 (432)	
§ 2. Fredholm の積分方程式	435
1°. Fredholm の積分作用素 (435) 2°. 対称核の方程式 (438)	

3°. Fredholm の定理, 退化核の場合(439)	4°. 非退化核をもつ方程式に対する Fredholm の定理(441)	5°. Volterra の方程式(446)	6°. 第一種の積分方程式(447)
§ 3. パラメタをふくむ積分方程式, Fredholm の方法448		
1°. H における完全連続作用素のスペクトル(448)	2°. λ のベキ級数としての解, Fredholm の行列式(449)		
第 10 章 線形空間における微分法の基礎			
§ 1. 線形空間における微分法の基礎453		
1°. 強微分(Fréchet の微分)(453)	2°. 弱微分(Gâteaux の微分)(455)	3°. 有限増分の公式(456)	4°. 強弱の微分可能性間の関係(457)
5°. 微分可能な汎函数(459)	6°. 抽象函数(459)	7°. 積分(459)	8°. 高次導函数(461)
9°. 高次の微分(464)	10°. Taylor 展開(464)		
§ 2. 極値問題466		
1°. 極値の必要条件(466)	2°. 2階微分, 極値をとるための十分条件(469)		
§ 3. Newton の方法471		
文 献476		
索 引479		

