目　　次

序

第1章　Γ 函数および B 函数 …… 1

§1　Γ 函数の定積分表示と無限乗積表示 …… 1

§2　B 函数，Γ 函数との関係 …… 10

§3　複素数域で定義された Γ および B 函数 …… 14

§4　Γ 函数に関する周辺積分表示式 …… 19

§5　B 函数に関する周辺積分表示式 …… 22

§6　Γ 函数の漸近展開 …… 24

§7　多 Γ 函数，指数積分，誤差函数 …… 33

第2章　直交多項式としての特殊函数 …… 37

§8　有限区間 (a, b) での直交多項式 …… 37

8·1　有限区間での直交多項式の一般理論 …… 37

8·2　Jacobi，Gegenbauer，Legendre，Tschebyscheff の多項式，超球多項式 …… 39

8·3　規格化積分 …… 45

§9　無限区間での直交多項式 …… 48

9·1　(a, ∞) 区間での直交多項式，Sonine，Laguerre の多項式 …… 49

9·2　規格化積分 …… 51

9·3　$(-\infty, \infty)$ 区間での直交多項式，Hermite の多項式，規格化積分 …… 53

§10　直交多項式が満足する微分方程式 …… 55

10·1　一般論 …… 55

10·2　Jacobi の多項式が満足する微分方程式，Legendre の微分方程式，Tschebyscheff の微分方程式 …… 57

10·3　Sonine の微分方程式，Laguerre の陪微分方程式，Hermite の微分方程式 …… 59

§11 直交多項式に関する Goursat 形積分表示式，母函数 …… 61

第3章 複素変数の微分方程式の級数解 …… 66

§12 正則点のまわりの級数解 …… 66

§13 確定特異点のまわりの級数解 …… 71

13·1 確定特異点とそのまわりの級数解一般理論，決定方程式，$\rho_1-\rho_2\neq$ 整数の場合の基本解 …… 71

13·2 $\rho_1-\rho_2=$ 正の整数 の場合，Frobenius の方法 …… 74

13·3 Gauss の超幾何微分方程式とその級数解 …… 77

13·4 Kummer の合流形超幾何微分方程式とその級数解 …… 86

13·5 Bessel の微分方程式の級数解 …… 90

§14 無限遠点を確定特異点とする方程式 …… 92

14·1 無限遠点のまわりの級数解一般理論 …… 93

14·2 Legendre の方程式の無限遠点のまわりの解 …… 95

第4章 P 函数およびその合流形函数 $\widetilde{P}$ …… 98

§15 Fuchs 形微分方程式，Riemann の P 函数 …… 98

§16 不確定特異点をもつ微分方程式，合流形 P 函数 $\widetilde{\widetilde{P}}$ …… 104

16·1 不確定特異点のまわりの形式解 …… 104

16·2 漸近展開と不確定特異点のまわりの基本解，合流形 P 函数 …… 107

§17 P 函数および合流形 P 函数に関する変換公式 …… 110

§18 導函数がまた P 函数となる P 函数とその微分公式 …… 116

§19 導函数がまた $\widetilde{P}$ 函数となる $\widetilde{\widetilde{P}}$ 函数とその微分公式 …… 123

第5章 漸化式の統一的理論 …… 127

§20 超幾何函数および合流形超幾何函数に関する昇降演算子と漸化式 …… 127

20·1 超幾何函数に関する昇降演算子 …… 127

20·2　超幾何函数に関する漸化式…… 131
20·3　合流形超幾何函数に関する昇降演算子と漸化式…… 136
§21　因子分解法…… 139
21·1　梗概…… 139
21·2　一般論…… 140
21·3　特殊微分方程式への応用…… 142
第6章　積分表示式…… 151
§22　積分表示式の一般論と超幾何函数への応用…… 151
22·1　一般理論と Euler 変換…… 151
22·2　超幾何函数の積分表示式…… 154
§23　Kummer の変換公式…… 161
§24　Gauss の微分方程式の3個の解の間の関係…… 169
24·1　未定係数法…… 169
24·2　周辺積分により直接導く方法…… 172
§25　合流形 P 函数の積分表示式を与える一般 Laplace 変換…… 176
§26　合流形超幾何函数に対する積分表示式と漸近展開式…… 182
26·1　積分表示式による最も変域の広い合流形超幾何函数の定義…… 182
26·2　積分表示式から漸近展開式を導くこと…… 189
26·3　積分表示式と漸化式…… 192
第7章　P 形特殊函数の諸性質…… 196
§27　Jacobi および Tschebyscheff の多項式と Tschebyscheff の函数…… 196
§28　Legendre の多項式と Legendre 函数…… 207
28·1　超幾何函数との関係，第1種の Legendre 函数 $P_\nu(z)$，第2種の Legendre 函数 $Q_\nu(z)$…… 207
28·2　漸化式による Legendre の多項式の形成…… 213

28·3 整数次の第2種 Legendre 函数 $Q_n(z)$ …… 216
§29 Legendre 函数に対する周辺積分表示式 …… 221
§30 Legendre 函数に関する漸化式 …… 227
§31 Legendre の陪函数と超球函数 …… 230
31·1 Legendre の陪函数と超球多項式 …… 230
31·2 Legendre の陪函数に関する漸化式 …… 234
31·3 超球函数と Legendre の陪函数に対する積分表示式 …… 238
31·4 正規直交関係 …… 239
§32 球調和函数 …… 240
32·1 球調和函数と直交系 …… 240
32·2 球面函数による展開，加法定理 …… 244
第8章 $\widehat{P}$形特殊函数の諸性質 …… 248
§33 Whittaker の合流形超幾何函数 …… 248
33·1 合流形超幾何函数に関する変換公式 …… 248
33·2 Whittaker の方程式と Kummer の方程式，Whittaker の函数と Kummer の函数との関係 …… 250
33·3 Whittaker の函数の漸近展開式 …… 252
33·4 Whittaker の函数に関する漸化式 …… 257
§34 Laguerre の方程式，Laguerre の函数，Laguerre の多項式 …… 258
§35 Weber-Hermite の函数 …… 261
35·1 Weber-Hermite の函数とその漸化式 …… 261
35·2 合流形超幾何函数との関係 …… 266
§36 Bessel 函数，円筒函数の積分表示式と漸近展開式1 …… 268
36·1 Bessel 函数と漸化式 …… 268
36·2 合流形超幾何函数との関係，Poisson 形積分表示式 …… 271
36·3 Hankel の函数，Bessel, Neumann 函数との関係 …… 278

36·4　円筒函数…… 285
§37　円筒函数の漸近展開式，半奇数次の円筒函数 …… 288
37·1　円筒函数の漸近展開…… 288
37·2　半奇数次の円筒函数…… 292
37·3　球 Bessel 函数 …… 295
§38　円筒函数の積分表示式 2 …… 298
38·1　Sommerfeld の積分表示式…… 298
38·2　Sonine の積分表示式 …… 303
38·3　Hankel 函数の分枝点 $z=0$ …… 308
§39　円筒函数の漸近展開式 2．鞍部点法 …… 310
§40　Bessel 函数の直交性，Fourier-Bessel 展開と Fourier-Bessel 積分…… 315
§41　変形された Bessel 函数 …… 321
付録　複素函数論の概説と偏微分方程式の変数分離…… 325
§A1　複素数の函数，正則性と Cauchy-Riemann の偏微分方程式…… 325
§A2　Cauchy の定理と Cauchy の積分公式，留数の定理 …… 328
2·1　Cauchy の定理 …… 328
2·2　Cauchy の積分公式，Goursat の定理…… 329
2·3　留数の定理 …… 331
§A3　複素函数の級数展開，解析接続 …… 332
3·1　Taylor 展開…… 332
3·2　Laurent 展開…… 333
3·3　一致の定理，解析接続 …… 336
§A4　正則函数の等角写像性，鞍部点付近の等高線 …… 341
§A5　特殊偏微分方程式の変数分離と特殊函数 …… 347
5·1　偏微分方程式としての基本方程式…… 347
5·2　直交曲線座標による変数分離…… 348

参考文献 …… 361
事項索引 …… 365
函数記号索引 …… 373