



# Inhaltsverzeichnis

## EINLEITUNG

1. Kapitel. <b>Die Abbildung der fundamentalen Operationen an Funktionen durch die Laplace-Transformation und ihre Umkehrung</b> . . . . .	15
§ 1. Lineare Substitution in der Originalfunktion und Multiplikation der Bildfunktion mit einer Exponentialfunktion . . . . .	15
§ 2. Lineare Substitution in der Bildfunktion und Multiplikation der Originalfunktion mit einer Exponentialfunktion . . . . .	17
§ 3. Integration der Originalfunktion. . . . .	18
§ 4. Integration der Bildfunktion . . . . .	20
§ 5. Differentiation der Originalfunktion . . . . .	21
§ 6. Differentiation der Bildfunktion . . . . .	23
§ 7. Reelle Faltung der Originalfunktionen und Produkt der Bildfunktionen . .	23
§ 8. Komplexe Faltung der Bildfunktionen und Produkt der Originalfunktionen	25

## I. TEIL

### Asymptotische Entwicklungen

2. Kapitel. <b>Allgemeine Betrachtungen über Asymptotik</b> . . . . .	29
§ 1. Asymptotische Darstellung von Funktionen . . . . .	29
§ 2. Asymptotische Entwicklung von Funktionen . . . . .	31
Allgemeine Eigenschaften einer asymptotischen Entwicklung . . . . .	32
Spezialfall: Asymptotische Potenzentwicklungen . . . . .	35
§ 3. Ein allgemeines Prinzip zur Aufstellung von asymptotischen Methoden und die verschiedenen Arten von Asymptotik . . . . .	39
§ 4. Kritische Bewertung der drei asymptotischen Methoden . . . . .	41
§ 5. Allgemeines über Abelsche Asymptotik . . . . .	42
3. Kapitel. <b>Abelsche Asymptotik der einseitigen Laplace-Transformation: Verhalten von <math>f(s)</math> im Unendlichen</b> . . . . .	45
§ 1. Asymptotische Entwicklung der $\mathcal{L}$ -Transformierten für $s \rightarrow \infty$ . . . . .	45
§ 2. Beispiele . . . . .	50
1. Das Gaußsche Fehlerintegral . . . . .	50
2. Das Exponentialintegral . . . . .	51
3. Die Stirlingsche Reihe für $\log \Gamma(s)$ . . . . .	52
4. Die Besselschen Funktionen für nichtreelle Werte der Variablen . . . . .	56
5. Die unvollständige Gammafunktion. Asymptotische Halbierung des Gammaintegrals und der Exponentialreihe . . . . .	58
6. Entwicklungen mit logarithmischem Faktor. . . . .	61

§ 3. Asymptotische Entwicklung eines $\mathfrak{L}$ -Integrals mit komplexem Weg. Deformation eines ursprünglich reellen Integrationsweges zwecks Erweiterung des Bereichs der asymptotischen Entwicklung . . . . .	64
§ 4. Beispiele . . . . .	76
1. Die Besselschen Funktionen für reelle Werte der Variablen . . . . .	76
2. Das Integral $\varphi(z) = \int_0^a e^{izx^q} g(x) dx$ für reelle $z$ . . . . .	78
§ 5. Asymptotische Entwicklung eines Integrals der Form $\int_a^b e^{sh(x)} g(x) dx$ (Laplace- sches Problem der Funktionen grosser Zahlen). Die Methode der Sattelpunkte	83
§ 6. Beispiele . . . . .	88
1. Die Stirlingsche Reihe für $\Gamma(s)$ . . . . .	88
2. Die Fresnelschen Integrale . . . . .	90
§ 7. Asymptotische Entwicklungen nach anderen Funktionen als Potenzen . . . . .	92
§ 8. Asymptotische Entwicklung von komplexen Faltungsintegralen . . . . .	95
4. Kapitel. <b>Abelsche Asymptotik der einseitigen Laplace-Transformation: Verhalten von <math>f(s)</math> an Stellen im Endlichen</b> . . . . .	97
§ 1. Größenordnung des Unendlichwerdens von $f(s)$ bei Annäherung an eine sin- guläre Stelle in einem Winkelraum . . . . .	97
§ 2. Erschliessung der algebraischen und logarithmischen Singularitäten von $f(s)$	98
5. Kapitel. <b>Abelsche Asymptotik der zweiseitigen Laplace-Transformation und der Mellin-Transformation</b> . . . . .	101
§ 1. Erschliessung der Singularitäten der $\mathfrak{L}_{II}$ -Transformierten . . . . .	101
§ 2. Erschliessung der Singularitäten der $\mathfrak{M}$ -Transformierten . . . . .	105
§ 3. Beispiele (Gamma- und Zetafunktion) . . . . .	107
6. Kapitel. <b>Abelsche Asymptotik der durch das komplexe Umkehrintegral dargestellten <math>\mathfrak{B}</math>-Transformation für Funktionen mit Singulari- täten eindeutigen Charakters</b> . . . . .	109
§ 1. Allgemeines über die Asymptotik des komplexen Integrals . . . . .	109
§ 2. Asymptotische Entwicklung von $F(t)$ nach Exponentialfunktionen . . . . .	110
§ 3. Asymptotische Entwicklung von $\Phi(z)$ nach Potenzen . . . . .	115
§ 4. Beispiele . . . . .	118
1. Grenzwert der Thetafunktion $\vartheta_3(0, z/\pi)$ bei Annäherung an $z = i$ . . . . .	118
2. Verhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^x z}$ für $z \rightarrow 0$ . . . . .	122
3. Verhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} T(n) e^{-n^x z}$ für $z \rightarrow 0$ . . . . .	122
4. Asymptotisches Verhalten des Logarithmus von ganzen transzendenten Funktionen endlichen Geschlechts für $z \rightarrow \infty$ . . . . .	123
§ 5. Asymptotische Entwicklung des Integrals $\Phi(z) = \int_0^{\infty} \Phi_1(\zeta) \Phi_2(z/\zeta) d\zeta/\zeta$ auf Grund der Entwicklungen von $\Phi_1$ und $\Phi_2$ . Asymptotik der Stieltjes-Trans- formation . . . . .	131
§ 6. Bestimmung der Singularitäten von $\mathfrak{M}\{\Phi_1 \cdot \Phi_2\} = 1/(2\pi i) \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \varphi_1(\sigma) \varphi_2(s-\sigma) d\sigma$ auf Grund derjenigen von $\mathfrak{M}\{\Phi_1\} = \varphi_1(s)$ und $\mathfrak{M}\{\Phi_2\} = \varphi_2(s)$ . . . . .	136

<b>7. Kapitel. Abelsche Asymptotik der durch das komplexe Umkehrintegral dargestellten <math>\mathfrak{B}</math>-Transformation für Funktionen mit algebraischen und logarithmischen Singularitäten . . . . .</b>	<b>141</b>
§ 1. Allgemeine Betrachtungen zu dem Fall nichteindeutiger Singularitäten . . . . .	141
§ 2. Eine endliche asymptotische Entwicklung von $F(t)$ für $t \rightarrow \infty$ . . . . .	142
§ 3. Asymptotische Entwicklung von $F(t)$ für $t \rightarrow \infty$ . . . . .	144
§ 4. Ersatz des geradlinigen Integrationsweges in $\mathfrak{B}$ durch einen winkelförmigen und Asymptotik der so entstehenden $\mathfrak{B}$ -Transformation für $t \rightarrow \infty$ . . . . .	156
§ 5. Beispiele . . . . .	165
1. Das Exponentialintegral . . . . .	166
2. Der Strom im induktionsfreien Kabel . . . . .	166
3. Die Besselschen Funktionen für reelle Werte der Variablen . . . . .	168
4. Die Fourier-Bessel-Koeffizienten . . . . .	170
5. Die Wellenfunktion für das kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffatoms . . . . .	172
<b>8. Kapitel. Abelsche Asymptotik der <math>\mathfrak{B}</math>-Transformation für <math>t \rightarrow 0</math> . . . . .</b>	<b>174</b>
§ 1. Asymptotische Entwicklung von $F(t)$ für $t \rightarrow 0$ auf Grund des Verhaltens von $f(s)$ für $s \rightarrow \infty$ in einer Halbebene . . . . .	174
§ 2. Die Heavisideschen Entwicklungstheoreme der Operatorenrechnung im Lichte der Abelschen Asymptotik des komplexen Integrals für $t \rightarrow 0$ und $t \rightarrow \infty$ . . . . .	177
<b>9. Kapitel. Taubersche Asymptotik der Laplace-Transformation . . . . .</b>	<b>181</b>
§ 1. Taubersche Asymptotik reeller Art. Beispiel: Stabilität bei Erneuerungsvorgängen . . . . .	181
§ 2. Taubersche Asymptotik funktionentheoretischer Art. Beispiel: Der Primzahlsatz . . . . .	186
<b>10. Kapitel. Asymptotische Aussagen verschiedener Art über die Original- und die Bildfunktion der Laplace-Transformation . . . . .</b>	<b>193</b>
§ 1. Asymptotische Aussagen über die Bildfunktion . . . . .	193
§ 2. Asymptotische Aussagen über $F(t)$ auf Grund der Existenz von $\mathfrak{Q}\{F\}$ . . . . .	195
§ 3. Asymptotische Aussagen bei der zweiseitigen Laplace-Transformation . . . . .	195
§ 4. Das asymptotische Verhalten einer ganzen Funktion von Exponentialtypus . . . . .	196
§ 5. Das asymptotische Verhalten der Grössen $M(x)$ und $m(x)$ für $f(s)$ . . . . .	197

II. TEIL

**Konvergente Entwicklungen**

Einleitung . . . . .	201
<b>11. Kapitel. Fakultätenreihen . . . . .</b>	<b>203</b>
§ 1. Allgemeine Eigenschaften der Fakultätenreihen . . . . .	203
§ 2. Funktionentheoretische Hilfssätze . . . . .	205
§ 3. Darstellung einer Fakultätenreihe als Laplace-Transformierte . . . . .	211
§ 4. Darstellung einer Laplace-Transformierten durch eine Fakultätenreihe . . . . .	219
§ 5. Darstellung einer Laplace-Transformierten durch eine asymptotische Fakultätenreihe . . . . .	222

§ 6. Darstellung einer Laplace-Transformierten durch eine verallgemeinerte Fakultätenreihe . . . . .	226
§ 7. Das Konvergenzproblem der verallgemeinerten Fakultätenreihe . . . . .	229
§ 8. Fakultätenreihen als konvergente Darstellungen asymptotischer Potenzreihen	232
<b>12. Kapitel. Spezielle Reihen . . . . .</b>	<b>236</b>
§ 1. Die lineare Transformationsformel der Thetafunktion . . . . .	236
§ 2. Entwicklungen nach Besselschen Funktionen, die mit der linearen Transformationsformel für die Funktion $\vartheta_3(v, t)$ äquivalent sind . . . . .	238
§ 3. Entwicklung der Laguerreschen Polynome und der konfluenten hypergeometrischen Funktion nach Besselschen Funktionen . . . . .	241
§ 4. Entwicklungen nach Laguerreschen Polynomen . . . . .	243
§ 5. Entwicklungen nach Hermiteschen Polynomen . . . . .	247
§ 6. Entwicklungen nach konfluenten hypergeometrischen Funktionen . . . . .	248
§ 7. Eine Korrespondenz zwischen Fourier-Reihen und Partialbruchreihen . . . . .	250

### III. TEIL

#### Gewöhnliche Differentialgleichungen

<b>13. Kapitel. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten im einseitig unendlichen Intervall unter Anfangsbedingungen</b>	<b>255</b>
§ 1. Die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und beliebiger Störungsfunktion . . . . .	255
1. Die inhomogene Differentialgleichung unter verschwindenden Anfangsbedingungen . . . . .	258
2. Die homogene Differentialgleichung unter beliebigen Anfangsbedingungen	266
§ 2. Beispiele, insbesondere der elektrische Schwingungskreis. Übergangsfunktion und Frequenzgang . . . . .	269
§ 3. Rückkoppelungssysteme und Regelungstechnik . . . . .	278
Regelungstechnik. . . . .	282
Stabilität der Regelung. . . . .	286
Regelungsvorgänge mit Totzeit . . . . .	289
Exakte mathematische Diskussion der Stabilität . . . . .	294
§ 4. Erregung durch die Impulsfunktion . . . . .	298
§ 5. Ein System von Differentialgleichungen (Normalfall) . . . . .	310
1. Das inhomogene System unter verschwindenden Anfangsbedingungen . . . . .	311
2. Das homogene System unter beliebigen Anfangsbedingungen. . . . .	314
§ 6. Ein System von Differentialgleichungen, bei dem nicht der Normalfall vorliegt. Nichterfüllbare Anfangsbedingungen . . . . .	318
§ 7. Kettenleiter und Wellenfilter. Synthese eines Filters mit vorgegebenen Sperr- und Durchlassbereichen . . . . .	328
<b>14. Kapitel. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten im zweiseitig unendlichen Intervall unter Anfangs- und Randbedingungen. . . . .</b>	<b>345</b>
§ 1. Anwendung der $\mathfrak{L}_{II}$ -Transformation und Aufstellung desjenigen Lösungsausdrucks, der einem bestimmten Holomorphiestreifen der Bildfunktion zugeordnet ist . . . . .	345
§ 2. Die Greensche Funktion des Problems . . . . .	348

§ 3. Lösung unter Voraussetzung der Existenz von $F(-\infty)$ und $F(+\infty)$ . . . . .	350
§ 4. Lösung unter Voraussetzung der Existenz von $\int_{-\infty}^{+\infty}  F(t)  dt$ . . . . .	356
§ 5. Weitere Lösungen . . . . .	360
<b>15. Kapitel. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten im Originalraum der Laplace-Transformation . . . . .</b>	<b>363</b>
§ 1. Anwendung der $\mathcal{L}$ -Transformation auf Differentialgleichungen mit Polynom-Koeffizienten . . . . .	363
§ 2. Beispiel: Die Differentialgleichung der Besselschen Funktionen . . . . .	366
§ 3. Beispiel: Die Differentialgleichung der Laguerreschen Funktionen. Das Spektrum des Wasserstoffatoms in der Wellenmechanik . . . . .	368
1. Das diskrete Spektrum . . . . .	371
2. Das kontinuierliche Spektrum . . . . .	375
§ 4. Ansatz der Lösung als Integral mit komplexem Weg. Asymptotische Entwicklungen der Lösung (Thomésche Normalreihen) . . . . .	377
<b>16. Kapitel. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten im Bildraum der Laplace-Transformation . . . . .</b>	<b>386</b>
§ 1. Lösung der Differentialgleichung mit im Unendlichen holomorphen Koeffizienten durch $\mathcal{L}^{(\varphi)}$ -Integrale . . . . .	336
§ 2. Beispiel: Die Mathieusche Differentialgleichung . . . . .	396
§ 3. Lösung von Differentialgleichungen mit vollmonotonen Koeffizienten durch $\mathcal{L}$ -Integrale mit monotoner Originalfunktion . . . . .	399
<b>Anhang</b>	
Der Satz von Lagrange-Bürmann . . . . .	405
<b>Literarische und historische Nachweise . . . . .</b>	<b>409</b>
<b>Sachregister . . . . .</b>	<b>429</b>
<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>siehe I. und III. Band</b>
<b>Berichtigungen zu Band I . . . . .</b>	<b>435</b>