目　　次

原著者序文……iii

第Ⅰ部　基本的予備知識

第1章　科学における因子分析の役割……*3*

1.1　**データと科学**……*4*
科学的研究の性格／*4*　科学的研究の基礎概念／*8*

1.2　**データ行列**……*11*
実体の相／*12*　属　性／*12*　時　点／*13*　条件または教示／*13*　評価体／*14*　測　度／*15*

1.3　**行列範疇の組合せ**……*15*
実体を含む範疇／*16*　属性を含む二範疇集合／*16*　二集合範疇系の1つとしての時点／*17*

1.4　**因子分析の目的**……*18*
系の次元／*18*　系の基本変量／*18*　因子不変性／*21*
因子分析と予測／*22*　解釈の容易化／*25*

1.5　**因子分析の応用**……*26*
心理学／*26*　政治科学／*26*　医　学／*27*　その他の諸領域／*27*

第2章　簡単な行列の諸概念……*29*

2.1　**序　論**……*30*
行列の定義／*30*　行列の原点／*30*　データの行列の行および列の意味／*30*　行および列の互換性／*31*　行および列の互換性の例外／*31*　実体および属性の相反的性格／*31*　科学的な予測とデータ行列／*32*　基準属性／*32*　予測属性／*32*　予測式／*33*　実体の種類／*33*

2.2　**行列記法**……*33*
行列の定義：数の表は行列として取り扱われるということを示すこと／*33*　行列の大きさを明確化すること／*34*

行列における数値／*34*　数を表わすのに文字を用いること／*34*　文字を行列の表示に用いること／*35*

2.3　**行列の種類** …… *35*

一般矩形行列／*35*　正方行列／*35*　対称行列／*36*　対角行列／*36*　スカラー行列／*36*　単位行列／*37*　符号行列／*37*　交代行列（歪対称行列）／*38*　三角行列／*38*　半三角行列／*38*　0－1型行列／*39*　零行列／*40*　ベクトル／*40*　全要素1のベクトル／*40*　0-1型ベクトル／*41*　零ベクトル／*41*　スカラー量／*41*

2.4　**行列の転置** …… *41*

行列の等価／*42*　行列の自然次数／*42*　行列の転置／*42*　自然次数とその転置／*42*　転置の記号／*42*　転置の転置／*43*　普通にありふれた種類の行列の転置／*43*　ベクトルの転置／*43*

2.5　**超　行　列** …… *43*

超行列の定義／*43*　分割行列／*44*　超行列の自然次数／*44*　対称分割／*44*　対称形に分割された，対称単純行列／*45*　一般対角超行列／*45*　超行列としての半三角行列／*45*　タイプ1超ベクトル／*46*　ベクトルを要素に持つ超ベクトルとして表示される行列群／*46*　超行列の同等性／*47*　タイプ3超ベクトル／*47*

2.6　**超行列の転置** …… *47*

行列型要素を伴った一般超行列の転置／*47*　対称形に分割された対称単純行列の転置／*48*　対角超行列の転置／*48*　タイプ1超ベクトルの転置／*48*　タイプ2超ベクトルとして表現される単純行列の転置／*49*　タイプ3超ベクトルの転置／*50*

2.7　**行列の加法と減法** …… *50*

単純行列の加法／*50*　加法に関する若干の法則／*50*　単純行列の減法／*51*　加法と減法／*51*　超行列の加法と減法／*51*　和または差の転置／*51*　特殊な種類の行列／*52*

2.8　**ベクトル積** …… *53*

2個のベクトルの従積／*53*　2個のベクトルの従積の転置／*53*　2個のベクトルの主積／*53*　主積の転置／*54*　1個のベクトルとその転置による積／*54*　定義できない

ベクトル積／*54*　交換の法則／*55*　タイプ1超ベクトルの従積／*55*　タイプ1超ベクトルの主積／*55*　2個のタイプ1超ベクトルの主積の転置／*56*　特殊なベクトル積／*56*

2.9　**行列の乗法** …… *58*

タイプ2超ベクトルとして表現される行列／*58*　タイプ2超ベクトルの従積としての積 *ab*／*59*　タイプ2超ベクトルの主積として表現される2個の行列の積／*60*　因子の順序を逆にした場合／*61*　因子の次元数とそれらの積／*61*　交換の法則および行列乗法／*62*　行列乗法の結合の法則／*62*　結合の法則と代数学的検算／*62*　行列乗法の分配の法則／*62*　分配の法則と代数学的検算／*63*　行列の積の転置／*63*

2.10　**特殊な行列積** …… *63*

行列積とその転置／*63*　行列の主および従積率の不等性／*64*　対称行列の左および右から行列およびその転置を掛け合せたときの主積／*64*　行列の正方積／*64*　行列のトレース／*65*　ベクトルを含む積／*65*　行列と全要素1のベクトルとの乗法／*66*　行列と基本ベクトルとの乗法／*67*　対角行列に関係する積／*68*　全因子が対角行列である場合の積／*69*　対角行列のベキ乗／*69*　スカラー行列を含む行列積／*70*　スカラー量を含む積／*71*　単位行列による乗法／*71*　符号行列による乗法／*71*　置換行列による乗法／*73*　基本ベクトルによる乗法／*73*　行列のベキ乗／*74*

第3章　行列の構造と解法 …… ***75***

3.1　**直交行列** …… *75*

直交ベクトル／*75*　正規化ベクトル／*75*　直交行列の定義／*75*　直交正規行列／*76*　縦長直交正規行列 Q の主積率／*76*　正方直交行列／*76*　特殊な型の正方直交正規行列／*77*　直交正規行列の積／*77*　行列の積／*78*　互いに直交する行列／*79*

3.2　**行列の階数** …… *79*

行列の因子／*79*　階数の定義／*80*　行列の最大階数／*80*　基本的行列／*80*　種々の型の基本的行列／*80*　超

行列の最小階数／*80*　行列の積の階数／*80*　特殊な種類の積の階数／*80*　正方基本的行列を含む積の階数／*81*　積率の階数／*81*　いくつもの行列の和の階数／*81*

3.3 **行列の階数の発見** …… *81*

行列の三角因子／*81*　基本的行列の特殊例／*81*　非基本的行列の特殊例／*81*　一般行列と置換行列の積／*81*

3.4 **行列の基本構造** …… *82*

行列の基本構造の定義／*82*　非基本的行列の基本構造／*82*　基本対角行列／*83*　積率行列の基本構造／*83*　同じ直交正規行列を伴った行列／*83*　グラム行列の特殊な指数／*84*　積率を含む基本対角とトレース／*84*　正方直交正規行列による左あるいは右乗法／*84*

3.5 **行列の逆行列** …… *84*

一般化逆行列と基本構造／*84*　正方基本的行列の逆行列／*85*　正方基本的行列の積の逆行列／*85*　特殊な行列の逆行列／*86*　上三角行列の逆行列／*86*　正方基本的行列の逆行列のための解法／*86*　基本積率行列の逆行列の解法／*87*　行列と正方基本的行列の逆行列との積のための解法／*87*　縦長基本的行列の一般化逆行列のための解法／*87*　縦長基本的行列の左直交正規の主積率／*88*　非基本的行列の一般化逆行列のための解法／*88*　行列の特殊和の正則逆行列／*89*　二次単純行列の逆行列／*89*

3.6 **超行列の逆行列** …… *90*

超行列の正則逆行列のための必要とされる条件／*90*　二次超行列の逆行列／*90*　1個の対角要素がスカラー量である場合／*90*　より高次からより低次行列の逆行列／*91*

3.7 **一般行列階数低減定理** …… *92*

低減式／*92*　直交式／*92*　2個の行列の積の最小階数／*92*　行列階数定理／*92*　行列階数低減定理の特殊例／*92*

3.8 **線形式の解法** …… *93*

線形式の行列形式／*94*　Xが正方かつ基本的である場合／*94*　Xが縦長かつ基本的である場合／*94*　横長基本的行列X'／*95*　Xが非基本的な場合／*95*

第4章　行列因子分解とその近似 …… *96*

4.1 **因子分析の基本的特徴** …… *96*
データ行列／***96***　近似行列／***97***　因子負荷量行列／***98***
因子得点行列／***99***
4.2 **行列階数低減定理** …… *100*
データ行列／***100***　任意行列／***101***　三重積／***101***　積行列／***102***　残差行列／***102***　積率行列／***103***　任意行列の特殊例／***104***
4.3 **基本構造化解** …… *105*
近似の特徴／***105***　共分散解法／***107***　解法の種類／***109***
4.4 **因子の不確定性** …… *110*
正方直交正規回転／***110***　正方基本回転／***110***
4.5 **行列の種類** …… *112*
データ行列／***112***　共分散行列／***112***　部分共分散行列／***114***
4.6 **計量の問題** …… *114*
原点の問題／***114***　尺度の問題／***115***

第II部　行列因子分解の諸方法—その1—

第5章　セントロイド法 …… ***119***

5.1 **方法の特徴** …… *119*
1度に1つのベクトル／***120***　行列階数低減法の特殊な場合／***120***　基本構造化解への近似／***120***　この方法はただ1つの解を定めるものではないということ／***121***
5.2 **解の種類** …… *121*
対角要素に1を入れるもの／***121***　対角要素に共通性の推定値を／***122***　共通性の逐次的解法／***122***
5.3 **対角要素に1を入れる解** …… *123*
5.4 **対角要素あるいは共通性の推定値の最適化** …… *131*
5.5 **対角要素の逐次的解法** …… *137*
5.6 **数学的証明** …… *141*
最大化する符号ベクトル／***141***　行列階数低減定理の特別な場合としてのセントロイド法／***144***　符号行列と因子行列の従積／***145***

第6章　グループ法 ……*147*

6.1　**グループ法の特徴** ……*147*
行列階数低減定理の特殊形／***147***　任意行列／***147***
6.2　**グループ法の種類** ……*148*
グループ・セントロイド法／***148***　重グループ法／***148***
6.3　**0-1型ベクトルを用いたグループ・セントロイド法** ……*148*
6.4　**0-1型および全要素1のベクトルを用いるグループ・セントロイド法** ……*155*
6.5　**重グループ法** ……*160*
6.6　**数学的証明** ……*166*
0－1型ベクトルと用いるグループ・セントロイド法／***166***
0－1型ベクトルと全要素1のベクトルの線形結合を用いるグループ・セントロイド法／***167***　重グループ法／***169***

第7章　基本構造逐次分析法 ……*170*

7.1　**解の特徴** ……*171*
一度に1因子／***171***　最小二乗解／***171***　逐次解／***172***　逐次解と行列階数低減／***172***　因子ベクトルと分散最大化法／***172***　解の直交性／***173***　対角要素の推定について／***173***
7.2　**解の種類** ……*174*
残差行列を伴なう場合の解／***174***　残差行列を伴なわない場合の解／***174***
7.3　**残差行列を伴なう場合の解** ……*174*
7.4　**残差行列を伴なわない場合の解** ……*184*
7.5　**数学的証明** ……*192*
残差行列を伴なう場合の解／***192***　残差行列を伴なわない場合の解／***195***

第8章　同時的基本構造化解法 ……*197*

8.1　**解の特徴** ……*197*
同時的解法のための指定因子数／***197***　最小二乗解／***198***　逐次的解法／***198***　最小累積誤差／***198***　必要な計算回数／***198***
8.2　**解の種類** ……*199*

行列階数低減法／*199*　直交化法／*199*
8.3 **行列階数低減法** ……*199*
8.4 **直交化法** ……*206*
8.5 **数学的証明** ……*214*
行列階数低減法／*214*　直交化法／*218*

第III部　行列因子分解の諸方法—その2—

第9章　ヤコビ型の解法 ……*223*

9.1 **方法の特徴** ……*223*
単一パラメータの直交正規行列による演算／*223*　逐次解／*223*　誤差の集積が大きいこと／*223*
9.2 **方法の種類** ……*224*
同時的方法／*224*　逐次的方法／*224*
9.3 **同時的方法** ……*224*
9.4 **逐次的方法** ……*232*
9.5 **数学的証明** ……*234*

第10章　行列次数低減法 ……*240*

10.1 **方法の特徴** ……*240*
基本構造化解法／*240*　逐次解法／*240*　逐次行列次数低減／*240*　逐次単一因子解法／*241*　非残差解法／*241*　特定因子数／*241*
10.2 **方法の種類** ……*241*
部分低減法／*241*　三項対角化解法／*241*
10.3 **部分低減法** ……*242*
10.4 **三項対角化法** ……*253*
10.5 **数学的証明** ……*263*
部分低減法／*263*　三項対角化法／*268*

第11章　不完全共分散行列の解法 ……*272*

11.1 **解法の特徴** ……*272*
データの非最適利用／*272*　計算の節約／*272*
11.2 **解法の種類** ……*273*
R_{xy} 行列／*273*　2つの部分行列を含む解法／*273*
11.3 **R_{xy} 行列** ……*275*

11.4　2つの部分行列の同時解法 ……282
11.5　二行列要素，二段階解法 ……290
11.6　数学的証明 ……294
R_{xy}法／**294**　（R_{xx}，R_{xy}）同時解法／**296**　二段階解法における2つの部分行列／**298**

第12章　データ行列の因子分析 ……**299**

12.1　方法の特徴 ……299
積率計算不要／**299**　因子負荷量と因子得点行列の同時的解法／**299**
12.2　方法の種類 ……300
セントロイド法／**300**　基本構造単一因子解法／**300**　基本構造同時因子法／**301**
12.3　セントロイド法 ……301
12.4　基本構造単一因子法 ……312
12.5　同時的因子解法による基本構造 ……319
12.6　数学的証明 ……325
セントロイド法／**325**　基本構造単一因子法／**327**　基本構造同時因子法／**331**

第IV部　範疇・原点および尺度化

第13章　原　点　問　題 ……**335**

13.1　種々の原点問題 ……335
主変換問題／**336**　従変換問題／**337**　両側変換問題／**338**
13.2　イプサティブな測度 ……340
イプサティブ測度の定義／**340**　イプサティブ測度の根拠／**342**　イプサティブな行列の特徴／**343**
13.3　基本構造と原点問題 ……344
13.4　相関行列からの素共分散行列の基本構造 ……345
13.5　素の共分散基本構造から決定された規範的共分散基本構造 ……356
13.6　規範的共分散基本構造から決定されたイプサティブな共分散基本構造 ……362
13.7　イプサティブな基本構造から決定された規模的共分散基本構造 ……366
13.8　数学的証明… ……372

基本構造と左中心化／*372*　規範的基本構造因子からの基本構造および右中心化イプサティブの証明／*376*

第14章　因子分析における範疇的変形……*379*

14.1　**重範疇集合**……*379*
属性—実体集合／*379*　属性—時点集合／*381*　実体—時点の対あるいは集合／*381*　付加的範疇／*382*
14.2　**原点への配慮**……*387*
14.3　**計算への配慮**……*388*
14.4　**標準計量をともなう一面因子解**……*390*
14.5　**数学的証明**……*397*

第15章　尺度化の問題……*399*

15.1　**尺度化の種類**……*399*
属性による尺度化／*399*　実体による尺度化／*400*　実体と属性による尺度化／*400*
15.2　**属性による尺度化**……*401*
尺度の一般的な問題／*401*　尺度化のための基準／*401*
15.3　**共通性問題と尺度化**……*402*
15.4　**方法の特徴**……*403*
行列階数低減法の特殊な場合／*403*　最小二乗基本構造化解法／*403*　尺度化対角行列の解法／*403*　二乗逐次型解法／*403*
15.5　**解法の種類**……*404*
15.6　**特殊性逐次因子解法**……*405*
15.7　**特殊性因子行列解法**……*411*
15.8　**特殊性段階的因子行列法**……*416*
15.9　**共通性逐次因子解法**……*420*
15.10　**共通性因子行列解法**……*424*
15.11　**共通性段階的因子行列法**……*427*
15.12　**数学的証明**……*430*
特殊性逐次因子法／*430*　特殊性因子行列法／*431*　特殊性段階的因子行列法／*432*　共通性逐次因子ベクトル法／*433*　共通性因子行列法／*435*　共通性段階的因子行列法／*436*　尺度から独立の一般化された手続／*437*

第16章　イ メ ー ジ 法 ……439

16.1　方法の特徴 ……440
共通性得点行列／440　逆行列の計算／440　尺度化問題／441　基本相関行列／441　基本構造化解／441
16.2　方法の種類 ……442
推定された共分散行列／442　推定された相関行列／442
独立尺度手続／442　最適残差行列／443
16.3　イメージ共分散行列 ……443
16.4　イメージ相関行列 ……448
16.5　独立尺度行列 ……453
16.6　最適な残差；反イメージ行列 ……457
16.7　数学的証明 ……463
推定された共分散行列／463　推定された相関行列／465
尺度に独立な解／465　最適な誤差共分散行列／467

第V部　因子回転と関連する諸方法

第17章　仮説からの基本因子行列 ……471

17.1　仮説的方法の特徴 ……473
任意因子行列／473　仮説行列／473　回転行列／474
17.2　方法の種類 ……475
重グループ行列／475　主軸任意行列／475　任意因子行列／475　ゼロ不完全和法／475　直交正規回転／476
17.3　重グループ因子行列 ……476
17.4　主軸因子行列 ……484
17.5　任意因子行列 ……489
17.6　ゼロ不完全和因子回転 ……496
17.7　直交回転行列 ……504
17.8　数学的証明 ……511
重グループ行列／511　主軸行列／512　任意行列／513　ゼロ不完全和単純構造行列／514　直交回転行列／516

第18章　解析的因子回転 ……520

18.1 **方法の特徴** ……522
行列直交正規回転／**522**　最適化関数／**523**　逐次型解法／**523**　計算誤差の累積／**524**
18.2 **方法の種類** ……524
逐次的因子バリマックス／**524**　同時的因子バリマックス／**525**　逐次因子一般バリマックス／**525**　同時的因子一般バリマックス／**525**
18.3 **逐次的因子バリマックス解** ……525
18.4 **同時的因子バリマックス解** ……533
18.5 **逐次因子一般バリマックス解** ……538
18.6 **同時的因子一般バリマックス解** ……543
18.7 **数学的証明** ……548
逐次因子バリマックス／**548**　同時的因子バリマックス／**550**　逐次的因子一般バリマックス／**552**　同時的因子一般バリマックス／**554**

第19章　直接バリマックス解法 ……**557**

19.1 **方法の特徴** ……557
いかなる任意の因子負荷行列をも必要としないこと／**557**　解析的方法／**557**　行列階数低減解法／**558**　逐次的解法／**558**　情報の利用／**558**　回転解とは異なる結果／**559**
19.2 **方法の種類** ……559
相関行列からの解／**560**　データ行列からの解／**560**　逐次因子一般バリマックス法／**560**　同時因子一般バリマックス法／**560**
19.3 **相関行列からの逐次因子バリマックス** ……561
19.4 **相関行列からの同時因子バリマックス** ……568
19.5 **データ行列からの逐次因子バリマックス** ……574
19.6 **データ行列からの同時因子バリマックス** ……580
19.7 **逐次因子一般バリマックス** ……587
19.8 **同時一般バリマックス** ……588
19.9 **数学的証明** ……589
相関行列からの逐次因子行列／**589**　相関行列から求められる同時因子行列／**590**　データ行列からの逐次因子バリマックス／**592**　データ行列からの同時バリマックス／

594　逐次一般バリマックス・ベクトル／*595*　同時一般バリマックス因子行列／*596*

第20章　因子得点行列 ……*597*

20.1　序　論 ……*597*
20.2　因子得点解の種類 ……*599*
セントロイド因子得点行列／*599*　重グループ因子得点行列／*599*　主軸因子得点行列／*599*　最小二乗因子得点行列／*600*　イメージ分析因子得点行列／*600*
20.3　セントロイド因子得点行列 ……*600*
20.4　重グループ因子得点行列 ……*605*
20.5　主軸因子得点行列 ……*609*
20.6　最小二乗因子得点行列 ……*612*
20.7　イメージ分析因子得点行列 ……*616*
20.8　数学的証明 ……*621*
セントロイド因子得点行列／*621*　重グループ因子得点行列／*625*　主軸因子得点行列／*626*　最小二乗因子得点行列／*627*　イメージ分析因子得点行列／*628*

第VI部　今日的な諸問題

第21章　一般化因子解法 ……*633*

21.1　はじめに ……*633*
21.2　一般および特殊単純構造因子得点 ……*638*
因子得点共分散行列と，二次の共通および特殊因子負荷量／*638*　一次一般および共通因子負荷量行列／*638*　一次一般および共通因子得点行列／*638*
21.3　因子得点共分散行列と二次共通および特殊因子負荷量 ……*639*
21.4　一次一般および共通因子負荷量行列 ……*650*
21.5　一次一般および共通因子得点行列 ……*652*
21.6　数学的証明 ……*655*
因子得点共分散行列と二次共通および特殊因子負荷量／*655*　一次一般および共通因子負荷量行列／*657*　一次一般共通因子得点行列／*659*

第22章　因子分析と0-1型データ行列 ……*661*

22.1 **序　　論** ……661
22.2 **シンプレックスを消去するための解の種類** ……665
最小二乗法によるシンプレックス・データ行列解／**665**
最小二乗法によるシンプレックス共分散行列解／**665**　シンプレックス共分散行列解への簡便法／**666**
22.3 **最小二乗法によるシンプレックス・データ行列** ……666
22.4 **最小二乗法によるシンプレックス共分散行列** ……672
22.5 **シンプレックス共分散行列を得るための簡便計算法** ……675
22.6 **共通性とその特別な場合としてのシンプレックス** ……677
22.7 **数学的証明** ……678
最小二乗法によるシンプレックス・データ行列／**678**　最小二乗法によるシンプレックス共分散行列／**684**　簡便法によるシンプレックス共分散行列／**688**　共通性と特別な場合としてのシンプレックス／**689**

第23章　因子分析と予測の問題 ……**692**

23.1 **解法の種類** ……693
階数低減解法／**693**　基本構造化解法／**694**　非基本構造化解／**694**　因子分析による自由度の増加／**694**　予測変量の選択と因子分析／**694**
23.2 **行列階数低減解法** ……695
23.3 **基本構造化解法** ……699
23.4 **非基本構造化解法** ……704
23.5 **因子分析による自由度の増加** ……710
23.6 **予測変量の選択と因子分析** ……716
23.7 **数学的証明** ……719
行列階数低減法による解法／**719**　基本構造化解法／**721**
非基本構造化解法／**722**　因子分析による自由度増加／**725**
予測変量の選択と因子分析／**726**

第24章　重集合因子分析法 ……**728**

24.1 **当モデルの経験的根拠** ……728
24.2 **方法の特徴** ……730
相関最大化法／**730**　階数1近似法／**730**　斜交分散最大化法／**731**　直交分散最大化法／**731**
24.3 **変量の集合が2個の場合** ……731
24.4 **予備的直交化** ……732

24.5 相関最大化法 ……740
24.6 階数1の近似法 ……745
24.7 斜交分散最大化法 ……752
24.8 直交分散最大化法 ……759
24.9 数学的証明 ……766
直交化法／766　相関最大化法／767　階数1による近似法／772　斜交分散最大化法／775　直交分散最大化法／777
参考文献 ……780
訳者あとがき ……783
索　引 ……787