



# 目 次

序

訳 者 序

読者への注意

定 義

記 号 表

## 第3章 微 分 法

|   |    |
|---|----|
| § 1. アフィオン空間 .....                                | 1  |
| 部分アフィオン空間 .....                                   | 3  |
| 線型写像, アフィオン写像 .....                               | 5  |
| ノルム・アフィオン空間 .....                                 | 6  |
| アフィオン空間の凸集合 .....                                 | 9  |
| ユークリッド線型空間とユークリッド・アフィオン空間 .....                   | 9  |
| エルミート線型空間とエルミート・アフィオン空間 .....                     | 11 |
| 有限次元ユークリッド【エルミート】空間とその双対空間との同型写像<br>【半同型写像】 ..... | 12 |
| 正規直交基底 .....                                      | 13 |
| 一般ユークリッドおよび一般エルミート空間 .....                        | 15 |
| § 2. 実一変数の実数値関数. 右側（左側）連続性 .....                  | 17 |
| 第一種不連続性. 方正関数 .....                               | 18 |
| 実一変数の実数値関数の導値 .....                               | 20 |
| 単調関数 .....  | 23 |
| 導関数と中間値の定理 .....                                  | 24 |
| 凸関数 .....   | 25 |
| § 3. アフィオン空間からアフィオン空間への写像の導値（導関数）.                |    |
| スカラー変数関数の導ベクトル .....                              | 27 |
| 一般の場合：ベクトルに沿う偏導値 .....                            | 29 |
| 導行列. ヤコビ行列式 .....                                 | 30 |
| ベクトルに沿う導値の不十分性 .....                              | 31 |

|  |     |
|--|-----|
| 導写像すなわち全微分   | 32  |
| 微分の記号  | 36  |
| 導写像の幾何学的解釈：微分多様体と接線型空間                                       | 36  |
| ユークリッド空間における実数値関数の勾配   | 38  |
| 導値の性質  | 39  |
| $F$ がアフィン空間の積の場合   | 40  |
| $E$ がアフィン空間の積である場合. 偏導値                                      | 41  |
| 連続双線型写像の導値   | 42  |
| 可導関数. 連続可導関数   | 44  |
| 連続可導な関数の例  | 45  |
| 可導関数の空間  | 45  |
| § 4. 合成関数に関する諸定理   | 46  |
| よく使われる導値の計算例   | 51  |
| 変数変換のテクニックへの応用   | 53  |
| § 5. 有限増分の公式   | 61  |
| 全可導性と偏可導性  | 66  |
| § 6. 高階導関数   | 68  |
| 高階導関数  | 71  |
| $E = \mathbf{K}^n$ の場合                                       | 73  |
| 積空間の場合. 全可導性と偏可導性  | 75  |
| $n$ 回可導関数の空間   | 75  |
| 積の導値 (ライプニッツの公式)   | 76  |
| § 7. テイラーの公式と最大, 最小  | 79  |
| 関数の導値の計算へのテイラーの公式の応用   | 82  |
| 座標系に関するテイラー展開  | 85  |
| 極大値, 極小値問題への応用. その定義   | 89  |
| 極値をとるための必要条件   | 89  |
| 極値であるための必要条件と十分条件  | 91  |
| 二つの実変数 $x, y$ の実数値関数 $f$ の場合                                 | 94  |
| 超曲面が接超平面のどちら側にあるかを調べることへのテイラーの公式の応用                          | 95  |
| § 8. 陰関数定理   | 96  |
| 陰関数の存在   | 96  |
| 陰関数の可導性  | 100 |
| $\mathcal{L}(\vec{F}; \vec{G})$ 上の関数 $u \mapsto u^{-1}$ の可導性 | 101 |
| とくに $E, F, G$ がスカラー体 $\mathbf{K}$ に等しい場合                     | 106 |
| $E, F, G$ が有限次元の場合   | 107 |
| 陰関数としての逆関数   | 109 |

|   |     |
|---|-----|
| 陰関数の高階導値の計算 .....                       | 113 |
| 変数と関数の変換の技術について .....                   | 116 |
| § 9. 微分多様体 .....                        | 118 |
| いくつかの座標を残りの座標の関数として表わすことによる多様体の定義 ..... | 118 |
| 径数表現による多様体の定義 .....                     | 119 |
| 陰関数による多様体の定義 .....                      | 127 |
| 実多様体と複素多様体 .....                        | 129 |
| 抽象多様体 .....                             | 130 |
| $N$ 次元アフィン空間の多様体の一点における接線型空間 .....      | 134 |
| 抽象多様体の接線型空間 .....                       | 137 |
| 階数一定の定理 .....                           | 139 |
| 独立関数と従属関数 .....                         | 142 |
| 特異多様体または径数多様体 .....                     | 144 |
| § 10. 条件つき極大・極小 .....                   | 145 |
| 条件つき極値を求める具体的方法 .....                   | 148 |
| 条件つき極大値の応用. ヘルダーとミンコフスキーの不等式 .....      | 150 |
| 凸関数の理論によるヘルダー不等式, ミンコフスキー不等式の証明 .....   | 157 |
| § 11. 変分法 .....                         | 158 |
| $J$ の可導性 .....                          | 161 |
| 極値の必要条件 .....                           | 165 |
| オイラーの方程式が求積法で解ける簡単な場合 .....             | 169 |
| 曲面上の測地線の方程式 .....                       | 175 |
| 条件つき極値問題 .....                          | 178 |
| 変数変換の影響 .....                           | 180 |
| 測地線への応用 .....                           | 181 |
| 両端が変動する場合. 横断性条件 .....                  | 184 |
| 横断性条件の測地線への応用 .....                     | 188 |
| ハミルトンの正準方程式 .....                       | 189 |
| 力学への応用 .....                            | 191 |
| 重積分に関する変分法 .....                        | 193 |
| 索引 .....                                | 199 |

訳者あとがき