



## 目 次

まえがき

|        |                          |    |
|--------|--------------------------|----|
| 第 1 章  | 有限要素法の原理                 | 1  |
| § 1.1  | 2 点境界値問題                 | 1  |
| § 1.2  | 一般 Fourier 展開型の解         | 2  |
| § 1.3  | 区分的 1 次の基底関数             | 3  |
| § 1.4  | 近似方程式の構成                 | 5  |
| § 1.5  | 行列の性質と有限要素解              | 7  |
| 第 2 章  | 変分法と Galerkin 法          | 9  |
| § 2.1  | 変分の汎関数と双 1 次形式           | 9  |
| § 2.2  | $H_1$ -ノルムと許容関数          | 10 |
| § 2.3  | 第 1 変分                   | 12 |
| § 2.4  | 変分学の基本定理と Euler の方程式     | 13 |
| § 2.5  | 正定値双 1 次形式               | 14 |
| § 2.6  | 弱形式                      | 16 |
| § 2.7  | 点荷重のかかった問題               | 17 |
| § 2.8  | Galerkin 法               | 19 |
| § 2.9  | Ritz 法                   | 20 |
| § 2.10 | 非斉次な Dirichlet 境界条件      | 21 |
| § 2.11 | 自然な境界条件                  | 22 |
| 第 3 章  | 1 次元有限要素法の誤差解析           | 25 |
| § 3.1  | Hilbert 空間と Schwarz の不等式 | 25 |

|                  |                           |    |
|------------------|---------------------------|----|
| § 3.2            | 双1次形式の有界性                 | 27 |
| § 3.3            | エネルギー空間                   | 27 |
| § 3.4            | エネルギー・ノルムによる最良近似          | 28 |
| § 3.5            | 有限要素解と正射影                 | 29 |
| § 3.6            | 正射影の最良性                   | 31 |
| § 3.7            | 区分的1次多項式による補間             | 31 |
| § 3.8            | 区分的1次補間多項式の誤差             | 32 |
| § 3.9            | 微分方程式の解の2階微分の評価           | 33 |
| § 3.10           | 連続な線形汎関数のノルムによる評価         | 35 |
| § 3.11           | 有限要素解のエネルギー・ノルムによる誤差評価    | 36 |
| § 3.12           | 有限要素解の平均2乗誤差とNitscheのトリック | 37 |
| 第4章 2次元楕円型境界値問題  |                           | 40 |
| § 4.1            | 2次元境界値問題と弱形式              | 40 |
| § 4.2            | 変分法に基づく定式化                | 42 |
| § 4.3            | 楕円型の条件                    | 43 |
| § 4.4            | 領域の三角形分割と基底関数             | 45 |
| § 4.5            | 2次元の基底関数と有限要素解            | 46 |
| § 4.6            | 自然な境界条件と混合型境界条件           | 48 |
| § 4.7            | 非斉次 Dirichlet 境界条件        | 51 |
| § 4.8            | ペナルティ法                    | 52 |
| § 4.9            | 解析的な非斉次 Dirichlet 境界条件    | 55 |
| § 4.10           | 混合型境界条件をもつ例題              | 55 |
| § 4.11           | 連立1次方程式の解法                | 58 |
| 第5章 行列成分の計算と座標変換 |                           | 61 |
| § 5.1            | 要素行列                      | 61 |
| § 5.2            | 領域全体での行列の構成               | 62 |

|        |                |    |
|--------|----------------|----|
| § 5.3  | 1 次の形状関数       | 63 |
| § 5.4  | 2 次の形状関数       | 65 |
| § 5.5  | 標準三角形への変換      | 66 |
| § 5.6  | 重心座標系における積分の計算 | 68 |
| § 5.7  | 要素行列の具体形と鋭角型分割 | 69 |
| § 5.8  | 数値積分公式         | 70 |
| § 5.9  | アイソパラメトリック変換   | 71 |
| § 5.10 | 1 辺が曲線状の三角形の変換 | 72 |

## 第 6 章 2 次元有限要素法の誤差解析と 変分法違反

|        |  |    |
|--------|--|----|
| § 6.1  | 三角形上の補間                                | 74 |
| § 6.2  | 補間の誤差評価                                | 74 |
| § 6.3  | 補間の微分の誤差評価                             | 77 |
| § 6.4  | 領域全体での補間の誤差評価                          | 77 |
| § 6.5  | 一様性の条件                                 | 78 |
| § 6.6  | 有限要素解の誤差                               | 79 |
| § 6.7  | 数値積分公式とその誤差                            | 80 |
| § 6.8  | 変分法違反                                  | 80 |
| § 6.9  | 摂動誤差の表示                                | 82 |
| § 6.10 | $a(\hat{u}_n, \hat{v})$ を数値積分することによる誤差 | 83 |
| § 6.11 | $(f, \hat{v})$ を数値積分することによる誤差          | 84 |

## 第 7 章 高階の微分を含む問題と非適合要素

|       |          |    |
|-------|----------|----|
| § 7.1 | 4 階微分方程式 | 87 |
| § 7.2 | 2 次の基底関数 | 88 |
| § 7.3 | 非適合要素    | 90 |
| § 7.4 | 摂動誤差     | 92 |

|        |                        |     |
|--------|------------------------|-----|
| § 7.5  | 要素の境界から生ずる誤差の評価        | 93  |
| § 7.6  | 非適合要素により生ずる誤差          | 96  |
| § 7.7  | 混合法                    | 97  |
| § 7.8  | 汎関数の停留性                | 99  |
| 第 8 章  | 1 次元熱伝導方程式             | 100 |
| § 8.1  | 空間変数の離散化               | 100 |
| § 8.2  | 時間変数の離散化               | 102 |
| § 8.3  | 集中質量近似                 | 103 |
| § 8.4  | 有限要素法と差分法との関係          | 105 |
| § 8.5  | 集中質量近似の誤差              | 106 |
| § 8.6  | 集中質量系の安定性と最大値原理        | 108 |
| § 8.7  | 整合質量系の最大値原理に基づく安定性     | 112 |
| § 8.8  | 行列の固有値と安定性             | 112 |
| § 8.9  | 集中質量系の固有値に基づく安定性条件     | 113 |
| § 8.10 | 整合質量系の固有値に基づく安定性条件     | 116 |
| 第 9 章  | 2 次元熱伝導方程式             | 118 |
| § 9.1  | 2 次元領域の分割と重心領域         | 118 |
| § 9.2  | 有限要素法の適用               | 119 |
| § 9.3  | 集中質量系における最大値原理と鋭角型分割   | 122 |
| § 9.4  | 安定性のための十分条件            | 124 |
| § 9.5  | 整合質量系における最大値原理         | 125 |
| 第 10 章 | 波動方程式                  | 127 |
| § 10.1 | 有限要素法の定式化              | 127 |
| § 10.2 | モード重ね合せ法               | 127 |
| § 10.3 | Newmark の $\beta$ スキーム | 128 |
| § 10.4 | スキームの安定性               | 131 |

|        |                         |     |
|--------|-------------------------|-----|
| 第 11 章 | 移流項をもつ問題                | 134 |
| § 11.1 | 移流項をもつ 1 次元拡散問題         | 134 |
| § 11.2 | 有限要素法の適用                | 135 |
| § 11.3 | 上流有限要素スキーム              | 137 |
| § 11.4 | 移流項をもつ 2 次元の拡散方程式       | 138 |
| § 11.5 | 上流有限要素三角形               | 139 |
| § 11.6 | 2 次元有限要素スキーム            | 141 |
| § 11.7 | スキームの安定性                | 142 |
| 第 12 章 | 自由境界問題                  | 143 |
| § 12.1 | Stefan 問題               | 143 |
| § 12.2 | 時間に依存する基底関数             | 144 |
| § 12.3 | 有限要素法の適用                | 145 |
| § 12.4 | スキームの安定性                | 148 |
| 第 13 章 | 非線形問題と逐次近似法             | 151 |
| § 13.1 | 非線形問題と弱形式の方程式           | 151 |
| § 13.2 | Navier-Stokes 方程式とその弱形式 | 153 |
| § 13.3 | Navier-Stokes 方程式の有限要素解 | 155 |
| § 13.4 | 極小曲面問題                  | 157 |
| § 13.5 | 多価の境界条件をもつ極小曲面問題        | 159 |
| 第 14 章 | 双対変分原理                  | 164 |
| § 14.1 | 最小変分問題                  | 164 |
| § 14.2 | 束縛条件の追加                 | 166 |
| § 14.3 | Lagrange 乗数法            | 168 |
| § 14.4 | 双対変分問題                  | 170 |
| § 14.5 | 束縛条件をもつ双対変分問題           | 173 |
| § 14.6 | 接触変換                    | 175 |

|         |                    |     |
|---------|--------------------|-----|
| § 14.7  | $J[u]$ の最小値の上下界の評価 | 177 |
| § 14.8  | 有限要素解の誤差の事後評価      | 178 |
| § 14.9  | 双対変分原理の物理的意味       | 180 |
| § 14.10 | 混合法                | 183 |
| 参考文献    |                    | 185 |
| 索引      |                    | 187 |

