



## 目次

まえがき

記号表

第1章	1次元Schrödinger作用素のスペクトル問題	1
§1.1	ポテンシャルと Jost 解の積分方程式	1
§1.2	基本解系	9
§1.3	Jost 解の Wronski 行列式	20
§1.4	Green 関数とレゾルベント	28
§1.5	展開定理と Parseval の等式	31
§1.6	スペクトル密度行列	39
第2章	Schrödinger 波動方程式の散乱理論	41
§2.1	1次元波の反射・透過係数	41
	a) 1次元準単色波束の反射と透過(41)    b) 反射係数と透過係数 (46)	
§2.2	外向波・内向波の境界条件と散乱作用素	48
	a) 外向波・内向波の境界条件(48)    b) 散乱作用素(49)	
§2.3	1次元問題の波動作用素と散乱作用素	51
	a) 波動作用素と散乱作用素の存在(51)    b) 波動作用素と散乱作用素の表現(57)	
§2.4	時間発展による散乱理論	59
	a) 散乱理論の波動像と漸近条件(59)    b) 波動作用素の漸近的完全性と散乱作用素(61)	
§2.5	Lippmann-Schwinger 方程式	63
	a) 1次元 Schrödinger 作用素の Lippmann-Schwinger 方程式 (63)    b) Lippmann-Schwinger 方程式の解と外向波・内向波 境界条件(65)    c) 3次元 Schrödinger 作用素の Lippmann-	

Schwinger 方程式(68) d)3次元散乱問題における Born 展開  
(71)

第3章 スペクトル・散乱問題の例 ..... 72

§3.1 Zakharov-Shabat 問題——1次元 Dirac 型作用素 ..... 72

a)Jost 解の積分方程式(72) b)Jost 解と Wronski 行列式(76)  
c)Wronski 行列式の零点(80) d)Green 関数・レゾルベント  
(81) e)展開定理とスペクトル密度(83) f)散乱問題と散乱  
量(85)

§3.2 3次元 Schrödinger 作用素の球対称問題 ..... 86

a)球対称問題の部分波解析(86) b)部分波の積分方程式(87)  
c)正則解と Jost 解(90) d)Jost 関数と展開定理(93) e)位相  
のずれと Levinson の定理(98) f)散乱問題(101)

§3.3 1次元 Schrödinger 作用素の点スペクトル..... 104

a)有限区間の Sturm-Liouville 問題(104) b)無限区間——定  
理 1.5.1, 2 の証明への補足(105)

第4章 相似変換と展開定理..... 108

§4.1 ユニタリ変換と相似変換 ..... 108

a)作用素のユニタリ同値(108) b)相似変換(109)

§4.2 相似変換と Parseval の等式 ..... 110

a)1次元 Schrödinger 作用素の  $x$  表示と  $\lambda$  表示(110) b)Jost  
解に関する相似変換(111) c)連続スペクトルの縮退と相似変  
換の積分核(112) d)相似変換と Parseval の等式(114) e)  
一般の境界条件に関する相似変換(115)

§4.3 Jost 解に関する相似変換の積分核 ..... 115

a)Jost 解に関する相似変換(115) b) $U_{\pm}^{-1}$  と相似変換  $\tilde{U}_{\pm} =$   
 $(U_{\pm}^{\#})^{-1}$ (122)

§4.4 相似変換の拡張 ..... 127

a)一般の系の相似変換(127) b)相似変換とスペクトル密度の  
拡張(128) c)1次元 Schrödinger 作用素の拡張された相似変  
換(131)

第5章 1次元 Schrödinger 作用素の逆問題 ..... 134

§ 5.1 Marchenko 方程式	134
a) Jost 解の変換式と Marchenko 方程式(134)	
b) 展開定理, Parseval の等式と Marchenko 方程式(136)	
§ 5.2 逆問題の設定と基本方程式	139
a) 逆問題の設定と Marchenko 方程式による解法(139)	
b) Marchenko 方程式と Gel'fand-Levitan 方程式(140)	
§ 5.3 一般化された Marchenko 方程式	141
§ 5.4 反射係数とポテンシャルの対応	146
§ 5.5 Marchenko 方程式によらない方法	150
a) Zakharov-Shabat の方法(150)	
b) その他の方法(153)	
§ 5.6 スペクトル密度と散乱量	154
§ 5.7 1次元 Schrödinger 作用素の逆問題の課題と結果	157
a) スペクトル理論の逆問題(157)	
b) 散乱理論の逆問題(157)	
c) スペクトル密度・散乱量に対する必要条件と十分条件(158)	

## 第 6 章 1次元 Schrödinger 作用素の逆問題の吟味

§ 6.1 Marchenko 方程式の積分核	162
a) 積分核に対する必要条件(162)	
b) 完全連続性(164)	
§ 6.2 Marchenko 方程式の解の存在と一意性	167
a) Marchenko 方程式と関数空間(167)	
b) 解の一意的存在のための十分条件(168)	
c) $F_{\pm}^{-1}$ , $(I + F_{\pm}^{-1})^{-1}$ の連続性(171)	
§ 6.3 Marchenko 方程式の解の性質と評価	172
a) Marchenko 方程式の近似系列の解の存在と一意性(173)	
b) Marchenko 方程式の近似積分核と解の評価(175)	
c) 近似方程式の解の系列の収束と微分可能性(177)	
d) ポテンシャルの近似系列(181)	
§ 6.4 スペクトル密度とポテンシャルおよび Jost 解	183
a) Marchenko 方程式によるポテンシャルの決定(183)	
b) スペクトル密度と Jost 解の対応(186)	
§ 6.5 散乱量に対する必要十分条件	187
a) 十分条件(187)	
b) 必要十分条件——定理 7.5.2 の証明の残り(190)	
c) スペクトル密度の族とポテンシャルの族(191)	

第7章 逆問題の例とその解法 ..... 192

§7.1 Zakharov-Shabat 問題(1次元 Dirac 型作用素の逆問題) ..... 192

    a) 相似変換の積分核(192)    b) Marchenko 方程式(196)    c) Marchenko 方程式の解(200)    d) ポテンシャルと Jost 解の決定(206)    e) 散乱量に対する必要条件と十分条件(207)

§7.2 3次元 Schrödinger 作用素の球対称問題 ..... 209

    a) 部分波解析における相似変換(209)    b) Parseval の等式とスペクトル密度(212)    c) Gel'fand-Levitan 方程式と Marchenko 方程式(213)    d) 一般化された Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式(215)    e) Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式の解の存在(216)    f) スペクトル密度と主要散乱量(217)    g) 散乱量に対する必要十分条件(218)    h) Bargmann のポテンシャル(221)

§7.3 Gel'fand-Levitan 方程式と一般の境界条件 ..... 222

§7.4 Sturm-Liouville 問題の逆問題 ..... 226

§7.5 3次元ポテンシャル散乱と Heisenberg の S 行列理論 ..... 229

    a) ポテンシャル決定のために十分な量(229)    b) 3次元ポテンシャル散乱の逆問題の解法(230)

第8章 非線形波動の解析 ..... 234

§8.1 非線形発展方程式に対する Lax の理論 ..... 234

§8.2 Lax 理論の展開 ..... 238

    a) Ablowitz-Kaup-Newell-Segur 理論(238)    b) いくつかの波の非線形相互作用(240)

§8.3 逆散乱法による初期値問題の解法とソリトン ..... 242

    a) 逆散乱法の見取図(242)    b) 逆散乱法と Fourier 解析(244)    c) 点スペクトルとソリトン(245)

§8.4 スペクトル密度の時間変化と逆散乱法の成立条件 ..... 246

§8.5 Korteweg-de Vries 方程式の初期値問題と  $N$ -ソリトン解 ..... 249

    a) 1-ソリトン解(249)    b)  $N$ -ソリトン解(250)    c) 井戸型ポテンシャルを初期値とする解(251)    d) 漸近解(253)

§8.6 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur 理論の初期値問題とソリトン ..... 253

- a)初期値問題(253)    b)解の爆発と一意性(255)    c)複数の点  
 スペクトルによる1つの孤立波(256)    d) $N$ -ソリトン解(257)  
 e)漸近解(258)

## 第9章 補章——解析学についての補足 ..... 259

### §9.1 Lebesgue 積分と絶対連続 ..... 259

- a)Lebesgue 積分(259)    b)積分の正則性(260)    c)積分の連続性と微分可能性(260)    d)絶対連続(261)

### §9.2 Fourier 積分変換 ..... 261

- a)Riemann-Lebesgue の定理(261)    b)Fourier-Plancherel の定理(262)    c)たたみこみの Fourier 変換(262)    d)正則関数の Fourier 変換(262)    e)正則関数の Hilbert 変換(263)

### §9.3 関数空間と積分作用素 ..... 264

- a) $\text{supp } f$  と  $C^n(\mathbf{R})$ ,  $C_0^n(\mathbf{R})$ ,  $S(\mathbf{R})$  など(264)    b) $L^p$ ,  $L^{p,(2)}$ , Banach 空間および強収束と稠密集合(265)    c)有界作用素と正則作用素(265)    d)コンパクトな集合, 完全連続作用素と Fredholm 積分方程式(266)

### §9.4 線形作用素のスペクトル分解 ..... 267

- a)対称作用素, 線形作用素, 部分的等長作用素, ユニタリ作用素, 射影作用素(267)    b)自己共役作用素のスペクトル分解とスペクトル関数(268)    c)自己共役作用素のスペクトル(269)    d)自己共役作用素の関数としての作用素(270)    e)固有関数による展開定理とスペクトル密度行列(270)    f)自己共役でない線形作用素のスペクトル分解(272)

## 附録 スペクトル・散乱理論とその逆問題の発展の概要と文献 ..... 273

### スペクトル・散乱理論と逆問題の発展の過程 ..... 273

- a)スペクトル理論から量子力学的散乱理論へ(273)    b)スペクトル・散乱理論の逆問題(274)    c)非線形波動解析への応用(275)

### 参考書・引用文献 ..... 277

### 索引 ..... 287