



# 目 次

## 第 1 章 数学の記号化

1.1 証明の形式化	1
1.2 自然推論の体系 $NK$	6
A. 初等群論の演繹体系	7
B. $NK$ の定義	20
1.3 演繹式の導出体系 $NK$	22

## 第 2 章 1 階述語論理の体系 $LK$

2.1 $LK$ の導入と定義	28
A. $LK$ の言語体系	29
B. $LK$ の公理	30
C. $LK$ の推論規則	30
D. $LK$ の証明図	31
E. $LK$ の定理	32
2.2 $LK$ の推論規則の意味 ( $NK$ との関係)	32
2.3 $LK$ の基本定理と無矛盾性の証明	37
2.4 基本定理の証明	39
A. 自然数と整礎性	39
B. cut 消去手続きとその正当性	43
C. cut 遞減操作	45
D. cut 消去の例	53
E. 位数に関する帰納法	58

## 第 3 章 完全性定理

3.1 冠頭形への変形	61
3.2 構造, モデル, 論理的に真な論理式	64

3.3 完全性定理とエルブランの定理 .....	71
--------------------------	----

## 第4章 集合論

4.1 集合概念とパラドックス.....	79
4.2 集合論を記述する形式的体系 $NK_{\epsilon}$ .....	84
4.3 部類の存在に関する公理.....	87
A. 部類生成操作 .....	87
B. 順序対と直積に関する部類 .....	92
C. 一般存在定理 .....	99
D. 一般存在定理の証明.....	106
4.4 集合の存在と規定に関する公理 .....	112
A. 分出公理.....	113
B. 合併集合の公理.....	114
C. ベキ集合の公理.....	115
D. 無限集合の公理.....	117
E. 置換公理.....	117
F. 選出公理.....	118
G. 基礎の公理.....	120
4.5 $NK_{\epsilon}$ における $\iota$ 規則 .....	121

## 第5章 自然数と順序数

5.1 順序関係 .....	125
5.2 自然数の定義とその性質 .....	127
5.3 線形順序と同型対応 .....	134
5.4 整列集合 .....	138
5.5 順序数 .....	141

## 第6章 整列可能定理と選出公理

6.1 超限帰納法 .....	148
6.2 順序数の上の関数と整列可能定理.....	150
A. 順序数の帰納的関数.....	150

B. 整列可能定理の証明	156
C. 整列集合の順序型	158
6.3 直積と選出公理	158
6.4 Zorn の補題	160

## 第7章 順序数の演算と対応する関数

7.1 順序数の和と上限演算	164
7.2 順序数の積	173
7.3 順序数のべきとその性質	177
7.4 $\varepsilon$ 数	183
7.5 自然数の上の関数	185

## 第8章 基数

8.1 基数の定義とその性質	189
8.2 有限集合	194
8.3 基数の演算	195
A. 基数の和	195
B. 基数の積	196
C. 可付番集合の濃度 $\aleph_0$	197
D. 基数のべき	198

## 第9章 数の体系

9.1 整数	200
A. 自然数から整数の導入	201
B. 整数上の演算	203
C. 整数上の関数—その集合としての定義	209
9.2 有理数と順序体	210
9.3 実数	219
A. 実数の定義	219
B. 実数上の四則演算	223
9.4 実数上の連続関数	230

9.5 実数のべき .....	239
9.6 三角関数 .....	243
9.7 複素数と代数学の基本定理 .....	248
A. 複素数の定義 .....	249
B. 複素関数の連続性 .....	251
C. 複素数の累乗根の存在 .....	254
D. 代数方程式の根の存在 .....	256
参考書 .....	259
索引 .....	261~268

