



## 目 次

## 1. 準 備

頁					
§1.	加群	1	§7.	Clifford $K$ -多元環	35
(1)	加群	1	(1)	対称な内積をもつ $K$ -加群	35
(2)	半加群と普遍加群	3	(2)	Clifford $K$ -多元環	36
§2.	環	6	(3)	Clifford $K$ -多元環 $C(K^{-n})$ ,	
(1)	環	6		$C(K_+^n)$ の構造	40
(2)	多項式環	7	(4)	$C(K^{-n})$ における写像 $t, \bar{\kappa}$	50
(3)	半環と普遍環	9	§8.	$K$ -Lie 環	51
§3.	体	10	§9.	群	51
§4.	$K$ -加群	11	(1)	群	51
(1)	$K$ -加群	11	(2)	直積と半直積	53
(2)	$K$ -加群の直和	14	(3)	群の作用	56
(3)	$K$ -加群のテンソル積	16	§10.	位相群	57
(4)	双対 $K$ -加群	20	(1)	位相空間	57
(5)	共役 $K$ -加群	21	(2)	位相群	61
§5.	$K$ -多元環	22	(3)	等質空間	62
(1)	$K$ -多元環	22	§11.	不変積分	62
(2)	テンソル $K$ -多元環	25	(1)	連続関数	62
(3)	外積 $K$ -多元環	27	(2)	Ascoli-Arzerà の補題	64
§6.	体の変更	32	(3)	不変積分	68
(1)	体の制限	32	(4)	Fubini の定理	75
(2)	体の拡大	33			

## 2. 群 の 表 現

§1.	$G$ - $K$ -加群	77		共役表現	87
(1)	$G$ - $K$ -加群と表現	77	(7)	外積表現	90
(2)	直和表現	82	(8)	体の制限と拡大	94
(3)	テンソル積表現	83	(9)	群準同型写像がひきおこす	
(4)	双対表現	84		表現	98
(5)	共役表現	87	§2.	既約表現と直交関係	99
(6)	コンパクト群の双対表現と		(1)	既約表現と完全可約	99

(2) コンパクト群の表現と完全可約性 . . . . . 103

(3) Schur の補題 . . . . . 104

(4) 可換群の既約表現 . . . . . 106

(5) 直交関係 . . . . . 107

§3. 表現の指標 . . . . . 111

(1) 指標 . . . . . 111

(2) 指標による特徴づけ . . . . . 113

§4. 直積群の表現 . . . . . 115

§5. 多元環の表現 . . . . . 119

(1)  $A$ - $K$ -多元環 . . . . . 119

(2)  $M(n, K)$ - $K$ -加群 . . . . . 120

(3)  $M(n, K) \oplus M(n, K)$ - $K$ -加群 . . . . . 121

### 3. 表現環

§1. 表現環 . . . . . 123

(1) 表現環と指標環 . . . . . 123

(2) 表現環の実制限と複素化 . . . 125

(3) 群準同型写像のひきおこす写像 . . . . . 126

§2. Weyl 群の作用 . . . . . 127

(1) 極大トーラス . . . . . 127

(2) Weyl 群の表現環  $R(T)$  への作用 . . . . . 130

§3. トーラスの複素表現環 . . . . . 132

(1)  $S^1$  の複素表現環 . . . . . 132

(2)  $T$  の複素表現環 . . . . . 134

### 4. 古典群の表現環

§1. ユニタリ群  $U(n)$  . . . . . 136

(1)  $U(n)$  の位相的性質 . . . . . 136

(2)  $U(n)$  の極大トーラスと Weyl 群 . . . . . 136

(3) 対称多項式 . . . . . 138

(4)  $U(n)$ - $C$ -加群  $C^n$  . . . . . 141

(5)  $U(n)$  の複素表現環 . . . . . 142

(6)  $U(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{u}(n)$  . . . . . 143

§2. 特殊ユニタリ群  $SU(n)$  . . . . . 145

(1)  $SU(n)$  の位相的性質 . . . . . 145

(2)  $SU(n)$  の極大トーラスと Weyl 群 . . . . . 145

(3)  $SU(n)$ - $C$ -加群  $C^n$  . . . . . 146

(4)  $SU(n)$  の複素表現環 . . . . . 147

(5)  $SU(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{su}_{n-1}$  . . . . . 147

§3. シンプレクティック群  $Sp(n)$  . . . . . 148

(1)  $Sp(n)$  の位相的性質 . . . . . 148

(2)  $Sp(n)$  の極大トーラスと Weyl 群 . . . . . 148

(3)  $\mathbb{C}_n^\pm$ -不変多項式  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  . . . 152

(4)  $Sp(n)$ - $C$ -加群  $(H^n)_C$  . . . . . 156

(5)  $Sp(n)$  の複素表現環 . . . . . 157

(6)  $Sp(n)$  の Lie 環  $\mathfrak{e}_n$  . . . . . 157

§4. 回転群  $SO(2n+1)$  . . . . . 160

(1)  $SO(n)$  の位相的性質 . . . . . 160

(2)  $SO(2n+1)$  の極大トーラスと Weyl 群 . . . 160

(3)  $\mathbb{C}_n^\pm$ -不変多項式  $\lambda_1', \dots, \lambda_n'$  . . . . . 164

(4)  $SO(2n+1)$ - $C$ -加群  $(R^{2n+1})^C$  . . . . . 166

(5)  $SO(2n+1)$  の複素表現環 . . . . . 167

(6)  $SO(2n+1)$  の実表現環 . . . . . 167

(7)  $SO(2n+1)$  の Lie 環  $\mathfrak{so}_n$  . . . . . 168

§5. スピノル群  $Spin(2n+1)$  . . . . . 171

(1) $Spin(n)$ の位相的性質 . . . . .	172	$Spin(2n)$ . . . . .	185
(2) $Spin(2n+1)$ の極大トーラス と Weyl 群 . . . . .	172	(1) $SO(2n), Spin(2n)$ の極大 トーラスと Weyl 群 . . . . .	185
(3) $Spin(n)$ - $K$ -加群 . . . . .	174	(2) $SO(2n)$ - $C$ -加群 $(\mathbf{R}^{2n})^c$ . . . . .	187
(4) $\tilde{T}$ - $C$ -加群と $R(\tilde{T})$ . . . . .	176	(3) $Spin(2n)$ - $C$ -加群 $\Delta_{2n}^+, \Delta_{2n}^-$ . . . . .	191
(5) $Spin(2n+1)$ - $C$ -加群 $\Delta_{2n+1}$ . . . . .	178	(4) $R(SO(2n))$ における関係 . . . . .	193
(6) 被覆変換 $\tau$ の作用 . . . . .	182	(5) 写像 $\tilde{\kappa}$ および $\kappa$ の作用 . . . . .	195
(7) $Spin(2n+1)$ の複素表 現環 . . . . .	183	(6) $SO(2n)$ の複素表現環 . . . . .	197
(8) $Spin(8n-1), Spin(8n+1)$ の実表現環 . . . . .	185	(7) $SO(4n)$ の実表現環 . . . . .	200
§6. 回転群 $SO(2n)$ とスピノル群		(8) $SO(2n)$ の Lie 環 $\mathfrak{D}_n$ . . . . .	200
		(9) $Spin(2n)$ の複素表現環 . . . . .	203
		(10) $Spin(8n)$ の実表現環 . . . . .	205
		§7. 付記 直交群 $O(n)$ の表現環 . . . . .	206

## 5. 例外群 $G_2, F_4$ の表現環

§1. 例外群 $G_2$ . . . . .	207	(3) 再び $R(Spin(7)),$ $RO(Spin(7))$ について . . . . .	241
(1) Cayley 数体 $\mathbb{O}$ . . . . .	207	(4) スピノル群 $Spin(8)$ . . . . .	244
(2) 例外群 $G_2$ . . . . .	209	(5) $Spin(8)$ の極大トーラス . . . . .	246
(3) $G_2$ の位相的性質 . . . . .	210	§4. 例外群 $F_4$ . . . . .	248
(4) $G_2$ の極大トーラスと Weyl 群 . . . . .	213	(1) Jordan $\mathbf{R}$ -代数 $\mathfrak{S}$ . . . . .	248
(5) $G_2$ - $C$ -加群 $\mathbb{O}_0^c$ . . . . .	217	(2) 例外群 $F_4$ . . . . .	250
(6) 再び $R(SU(3))$ について . . . . .	219	(3) 対角線形への変形 . . . . .	251
(7) $G_2$ の複素表現環 . . . . .	220	(4) Cayley 射影平面 . . . . .	255
(8) $G_2$ の実表現環 . . . . .	221	(5) 再び $Spin(8)$ について . . . . .	257
§2. $G_2$ の Lie 環と無限小 3 対 原理 . . . . .	221	(6) スピノル群 $Spin(9)$ . . . . .	258
(1) $\mathfrak{D}_4$ における外部自己同型 写像 . . . . .	221	(7) $F_4$ の位相的性質 . . . . .	263
(2) $\mathfrak{D}_4$ における無限小 3 対 原理 . . . . .	225	(8) $F_4$ の極大トーラスと Weyl 群 . . . . .	264
(3) $G_2$ の Lie 環 $\mathfrak{G}_2$ . . . . .	227	(9) $F_4$ の Lie 環 $\mathfrak{F}_4$ . . . . .	267
§3. 3 対原理とスピノル群 $Spin(7),$ $Spin(8)$ . . . . .	233	(10) 再び $R(Spin(8)),$ $RO(Spin(8))$ について . . . . .	272
(1) $SO(8)$ における 3 対原理 . . . . .	233	(11) 再び $R(Spin(9)),$ $RO(Spin(9))$ について . . . . .	274
(2) スピノル群 $Spin(7)$ . . . . .	237	(12) $F_4$ - $C$ -加群 $\mathfrak{S}_0^c$ . . . . .	275
		(13) $F_4$ - $C$ -加群 $\mathfrak{F}_4^c$ . . . . .	276

(14)  $F_4$  の複素表現環と実表  
環 . . . . . 280

ま と め . . . . . 283  
あ と が き . . . . . 287  
索 引 . . . . . 289

